LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:

In quibus

PHÆNOMENΩN OPTICORUM

Genuinæ *Rationes* investigantur, ac exponuntur:

ET

Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

U* 5. 104

Auctore ISAACO BARROW,

Collegii *SS. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto,

Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ παθήματα, ἐς ὅπερ εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵτε βραδεῖς, ἐν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴσω τὸ ὀξύτερος αὐτοὶ αὐτῶν γίγνεσθαι πάντες ὠπιδεδόασιν. Plato de Repub.

Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν ἐν χεῖρον. Arist.

UNIVERSITY LIBRARY 21 MAY 85 CAMBRIDGE

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & prostant venales apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1674.

03, 59

SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS;

HAS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* inſtitutæ atque dotatæ, ab ipſis verò optimâ fide, ſummâque prudentiâ adminiſtratæ & conſtitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac obſervantiæ ergò, devovet

Iſaac Barrow.

Imprimatur,

Edmundo Boldero PROCANCELLARIO.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Joban.*
Jo. Pearſon Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166¾.

EPISTOLA ad LECTOREM.

BENIGNE LECTOR,

MInimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipse primus obierim, munus successuris exemplo præire rem literariam; si minùs effectu, saltem conatu promovendi, non inhonesta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inesse bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora defluret; demùm ad promiscui literarii populi institutionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermittì; ut frustrà futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hic quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum speraris. Enimverò, quò tibi satisfacerem, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limámque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituram, refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres facti-

facilitant, à me depulſum partum amicorum haud recuſantium nutriciæ curæ commiſi, prout ipſis viſum eſſet, educandum aut exponendum. quorum unus (ipſos enim honeſtum duco nominatim agnoſcere) D. Iſaacus Newtonus, *collega noſter (peregregiæ vir indolis ac inſignis peritiæ) exemplar reviſit, aliqua corrigenda monens, ſed & de ſuo nonnulla penu ſuggereni, quæ noſtris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem noſtræ gentis haud immeritò* Merſennum *dixero, cùm ſuâ tum aliorum operâ provehendis hiſce literis natum) D.* Joh. Collinſius, *ingente ſuo cum labore editionem procuravit. Poſſem jam alios expectationi tuæ obices ponere, ſeu veniæ conciliatrices cauſas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) niſi* Catonis *ſenioris mordaculum illud in me ſubvereret recaſurum:* Rectè ſi Amphictyonum decreto conſtrictus hæc evulgas. *Hujuſmodi ſaltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium στοργὴ quædam elicuit, ut excuſatior ſis, ac à cenſura munitior prodiret. ſin acrior ſis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvis illrenuè reprehendas.*

Epiſtola;

Epiſtola; in qua Operis hujus Argumentum, & ſcopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis chariſſimè) quid in *Lectionibus* iſtis jam prælo ſubditis præſtiterim, aut præſtare voluerim. reſponſo facilè defungi poſſem, ea dicendo præſtita videri, quæ ſingularum initia pollicentur, è quibus inſequentium methodus, materiâ, ſcopus conſtare poterunt ipsâ delibanti. verùm in ſummam, opinor, iſta contrahi vis, & ſub unum aſpectum redigi. id quidem ægrè poſſum, niſi (quod juxtà faſtidioſum ac longum eſſet) complura *Theoremata* recitando; ſed utcunque morem tibi geram, rerum capita ſuccinctè perſtringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam ſuſcipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimìs principia explicando; tum ab ipſis *Utilia Conſectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus ſupplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, ſpeciatim primò receptas hypotheſes ad examen revoco, quatenus admittendæ ſunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere ſtudens; tum è phyſicis veriſimilibus cauſis ipſas eliciens ac aſtruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi viſa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipſe magnopere confidam. valeant quantum valere poſſunt. Saltem hypotheſes ipſas admitti peto, ceu experientiæ conſentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypotheſibus conſtitutis, ab iis proximè generalia

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonſtrationibus firmata appono) partim à me obſervata. deinad ſpecialia progredior, id mihi negotii ſumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriuſque, in uſu maximè poſitæ (*planæ* ſcilicet & *Sphæricæ*) potiſſima pertractem *In Catoptrica Sphærica* (ſiquidem planâ jam olim verè ſatis, ac fusè exculta habetur) ejuſmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum interſectiones atque limites innoteſcunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; reſpectu oculi nedum in radiationis axe, ſed extra ipſum ubicunque conſtituti. quæ certè vel nuſquam (quod ſciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata proſtant; id quod, incidentèr aliorum refutans ſententias, cùm ratiociniis perſpicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis noviſſimâ præſtratâ lege vel hypotheſi (quam *illuſtris Carteſius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter aſſignatas alicubi rationes veritati conſonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiſerunt, ipſum hactenus quiſquam (in ſcriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimis puncta radiantia longè diſſita (ſeu quaſi parallelos emittentia radios) conſiderans, quo pacto ab ipſis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum ſymptomata* liquent, ipſorum interſectiones ac limites dignoſcuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca deſignantur, tam oculi reſpectu qui in axe, quàm ejus qui uſpiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta ſenſibiliter vicina, ſeu divergentibus radiis alluentia. ſub extremum, quò paratior ſit horum uſus,

punctorum

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines ſingillatim exhibeo determinatas. Hiſce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (iſtis nempe, quæ hujuſmodi conſequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum poſteà ſpecialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales ſunt, & quomodò deſignandæ commonſtro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hiſce paſſim alia παίγνια interſpergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

A + B. *hoc eſt*	A & B *ſimul acceptæ.*
A — B.	A, *demptâ* B.
A —: B.	*differentia ipſarum* A, *&* B.
A × B.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
A = B.	A *æquatur ipſi* B.
A ⊏ B.	A *major eſt quàm* B.
A ⊐ B	A *minor eſt quàm* B.
A. B :: C. D	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
A, B, C, D ÷÷.	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
A. B ⊏ C. D.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A. B ⊐ C. D.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A. B + C. D = ⊏ ⊐	M. N. *Rationes* A ad B, & C ad D *compoſita* adæquant / excedunt / deficiunt a rationi M ad N.
Aq.	*Quadratum ex* A.
√A.	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
√ Aq + Bq.	*Latus compoſiti ex* Aq & Bq.

Reliquæ, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præſertim in analyſi tantillùm verſatus.

Lect.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo solutus, & scopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod inierim consilii rationem, paucis expediam. Cùm prius institutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem desiderantia, nec ex improviso auscultantibus, indè satis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud posse declinari; constitui, derelictâ tantisper istâ, protinus in amæniores (floribus nempe Physicis depictos, & fructibus consitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheseos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Cosmographiæ, reliquæ cujuscunque, prout occasio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffusa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; sed ad ejus quasi metropolim è vestigio rectà procedere; primas tantùm hypotheses excutere, præcipuáque (quibus illa tam vasta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnulla palmaria quidem illa, statim emergentia corollaria subtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præsertim, utilis, & fructuosa videri potest; quum è principiis rectè positis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehensio subnascantur.

Præcesserat anteloquium occasioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica sumemus exordium; scientia cum primis Nobili; quam cùm peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ simul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Astronomicas rationes quàm planè necessaria sit; ut Perspectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam, quæ totæ quantæ quantæ sunt ab ea pendent, ac principia sua mutuantur. Ut & præteream qualia, certè vix pretio

ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; visûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimiliter arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis πανσόφου eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſus directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis. Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſeclusâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potiùs inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda; poſtremóque forſan, ut de viſus remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod & *Democrito*

Democrito jam olim, ejúsque sequaci (dicam an simio?) suboluerat *Epicuro*. Quod sanè malim adsumere, vel supponere, quàm post tot alios operoso nisu comprobare. Certè (quo brevissimè tangam hanc quæstionem) sic in alia qualibet evenit sensione, (quidni pariter in visu?) non ut sensus in objecta feratur, sed ut ipsa se sensibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujusdam seu projecti, seu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immensam adeò circumquaque distantiam credamus emanare; neque quod sic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis constat opacis, ad transmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptissimè, sed ad progignendam à se vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd si lucem ipse profunderet, insitisque radiis attingeret objecta, quidni densissimis in tenebris hoc præsertim faceret, & feles vel (Historicis si placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indispensabilis ad visum necessitas esset? συναυγείας equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo sitis, circumfusas species quas vocant, ad oculos deportari, suique perceptionem efficere, cùm à speculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodissimè visionem adscribamus? satis hæc illam quam adsumimus vulgarem jam hypothesin adstruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa visum afficiant diversimode, puta lux, lumen, dies, crepusculum, colores, rerum imagines, phasmata; nec tamen absque luce. (Præsente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perspicuum est lucis hic præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem sedulò pensitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diversimodâ lucis unius operatione putemus proficisci. Cùm nempe lux sit illud quicquid sit quod à corpore lucido (quale stella, ignis, flamma) proveniens immediatè visum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuscula quædam opaca (seu lucem non penitùs excipientia) τῷ σκιόχοντι interspersa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes resiliens; quæ scilicet in oculum itineri suo expositum tumultuariè delapsa confusam quandam apparentiam excitat; quàm, si fortior sit, eique prorogandæ lucens præstò sit, appellamus diem; at si debilior fuerit, ejúsque fons abscesserit, crepusculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

majuſculis, & aliquatenus ſtabilem ſuarum partium ſitum retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, diſpoſitione, textura, hoc vel illo modo) detorta, vel utcunque repercuſſa, nimirum ut ejuſmodi corporibus illapſa lux vel motu ſuo, vel agendi virtute, vel ipſâ quantitate ſuâ (quoad raritatem intelligo, vel denſitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi diſcrimine diſpares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus inſignimus. Imagines autem nil planè ſunt aliud, quum lux ab objectis ita reflexa, vel refracta, ut rurſus in unum locum, talémque recolligatur ſitum, qualem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret objecto; directóque verſus oculum itinere procederet; quo fit ut ſimiliter objecta, ſed tanquam alibi collocata repræſentent. Phaſmata denique ſunt imaginum quaſi colores, pro lucis diverſa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diverſa variati. Craſſiuſculè jam iſta proponimus; quorum forſan aliqua ſaltem in dicendorum progreſſu magis elucescent.

VI. Cùm itáque lux in viſione peragenda, diverſiſque procreandis apparentiis ità quaſi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud ſenſum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò diſpiciendum venit. Et ejuſce quidem de natura à Phyſicis magnoperè deſceptatur; an puta ſit corporea quædam ſubſtantia, an qualitas; an actio tantùm, aut motus quidam; de productione quoque conſequentèr ejuſdem, & propagatione diſquiritur, utrùm continuo per medium tranſitu, vel medii duntaxat impulſu; vel ſuâ ipſius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæſtiones curioſè non eventilabo. Quod iſtam ſaltem ſententiam attinet, quæ lucem accidentium claſſi accenſet; quando veris corporeis effectibus (quales ſunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, ſenſum afficere) veræ ſubſiſtentes cauſæ, veri locales motus aſſignari debeant; neque quomodò uerè qualitati, vel accidenti cuipiam iſta competant intelligere mihi datum ſit; quinetiam quo ſeſe pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perſcrutantibus Philoſophis haud pauci ſe parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hic miſſam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπορροιαι, de lucidi corporis viſceribus emanantes, totúmque nobis & ipſi interjectum ſpatium quàm perniciſſimè tranſcurrentes lucem conſtituant; vel an illa potius nihil ſit aliud quàm ipſius lucentis actio, contigua ſibi corpora prementis ac impellentis, iiſque mediantibus alia quæ adjacent; tum & horum interceſſu rurſus alia proximè ſuccedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ serie; vix ausim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut censeam utroque subinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulsum; satiúsque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protensum exiguæ lampadis flammula se vividè conspiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpositum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu suppeditandæ profluviorum copiæ par sit; quomodo dum ea profundit non ipsum plusquam exhauriatur, & confestim evanescat, haud facile capio. Cùm verò rursus lucis inflectiones, illasque qui consequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulsus facit satis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præsternam expedit, iis quas mox tradam hypothesibus nonnihil explicandis congruum; hoc se modo, vel non absimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem esse quandam corpusculorum ultrà pene quàm cogitari potest minutorum & exilium; horum autem unumquodque vehementissimo motu percitum, aliquò (secundum legem istam naturæ satis receptam & exploratam) recta tendere; tum medium circumstare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaversùm liberè ferantur) è corporibus aggregatum, exilissimis quidem & illis, ast priorum respectu bene crassis & solidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interstitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum crassiorum corpusculorum occursu progressum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi superficie versantur, aut ab ea ruunt corpusculis; ut necesse sit iis sic inhibitis, atque repulsis introrsùm se recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejusdem naturæ corpusculis) aliquatenus intra suos cancellos restringatur, nec toto statim in auras expansa dissipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ cursum suum rectà continuare, materiam inibi deprehensam haud ità fortiter obsistentem in fugam agentia, & ante se protrudentia; quorum vestigiis alia de lucido corpore similiter prodeuntia prorsus insistent, longúmque simul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ serie procurrentem. Quin & istorum fortè nonnulla memoratas medii crassiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipsas quoque cedere cogant, & secum conspirantes in directum adjacentia.

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ità continuò, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; ut si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujúsque proinde materia vel promptiùs cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius seu cursus, seu impulsûs vim, effectúsque demutari; quin & si novi medii superficies ita transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti transitum perneget, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliet; aliò vim suam quàm retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibimet incurrentem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quòd si verò materia luci progredienti sic obviàm facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantùm hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ὁλοσχερῶς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesibus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII.

VIII. 1. *Radii lucis* (hoc eſt lucidi tranſitûs aut impulſus quales deſcripſimus tramites) in eodem exiſtentes ſimilari medio directi ſunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipſam, Phyſicéque loquendo figurâ priſmaticos eſſe, vel cylindricos. Nempe corpuſculum illud quodpiam in lucidi ſuperficie poſitum, à quo radius originem ſuam ducit, dum à primo ſuo loco ceu baſe defertur aut totâ ſuâ ſuperficie contiguum ſibi corpus rectà propellit, figuræ ſuæ (vel impulſi ſaltem corporis figuræ) congruum deſignat, ſuper hac vel illa baſe conſtitutum, ſolidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut priſma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, iſtos radios pro rectis lineis habere poſſumus; tum quia revera ſunt adeò tenues & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejuſmodi ſeu priſmaticis figuris ipſarum axes ità ſumi poſſunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illuſtrati) punctо ad quodvis medii (non obſtaculis interciſi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritiſſima ſuppoſitio quò vel intelligi vel admitti poſſit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è ſupra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præciſè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Phyſicam; verùm ſaltem admodum exiguam, qualique ferme minorem vel animo deſignare nequeamus; alteram ut non in unoquoque ſtrictè dicto temporis inſtanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, ſed ut nullum temporis intervallum ſentiri poſſit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipſum à quavis lucidi deſignabili parte deſignatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum iſtæ quas aſſignavimus radices, lucidum componentia corpuſcula, ſint illorum, quorum nos utcunque quantitates ſenſu vel animo pertingere valemus, corporum reſpectu tanquam infinitè parva, nec non infinitâ quaſi pernicitate donata, non difficilè concipi poteſt in omni deſignabili, vel imaginabili lucentis ſpatiolo prorſus innumerabilem eorum multitudinem exiſtere, quorum fere ſingula diverſas in plagas tendunt; ut nulla ſit deſignabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam ſaltem, utlibèt imperceptibilis & anguſti, temporis moram interponendo. In eo ſiquidem tempuſculo lucidi partes ſingulas innumera ſucceſſivè talia corpuſcula ſubingrediuntur juxta deferuntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad deſignatum medii ſpatium tendat, ſibi tranſmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tanquam

quam infinitos ſupponere fas eſt) idoneum reperiens. Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod alias rigidè ſumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diverſas in partes contendere, vel adniti; ſed nec eandem præciſè medii partem è diverſis locis accedentes corporum motus excipere quiſquam conceperit, opinor, aut ego conceſſerim; non certè magis quam idem corpus una plures locos occupare, vel eundem locum plura ſimul corpora ſuſcipere; ad iſtum modum intellecta dicta ſuppoſitio totam una cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Phyſicam permiſcebit. In noſtro rem explicandi modo nihil durius obverſari video, quam ut hinc divinæ potentiæ, ſapientiæque vis magis eluceſcat, in luce ſic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehenſibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorſus ei neceſſariæ fuerunt, ut ſenſionem efficeret, & reliqua tam utilia ei deſtinata munia obiret. Sanè lucis corpuſculum unum ab arenula quavis litorea pluſquam eâ fortaſſis proportione ſuperatur, quâ tota quanta quanta eſt mundana moles arenulam iſtam excedit; id quod non ità cenſebit abſonum, quiſquis ad complures ſatis obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum eſt porrò duas has fundamentales hypotheſes, ſic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illuſtrati quæcunque deſignabilis particula conſpicitur oculo, repræſentatur in ſpeculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò ſtatim oculo ſubducitur, & penitus obumbratur, ſi quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum ſufficit trajiciendis radiis quibus tota quantivis objecti facies obverſa depingatur. Et porrò quam nullâ poſſit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perſpiciliorum uſus apertiſſimè monſtrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri mediò perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, ſiquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc eſt in ſe, vel in ſuam retrò ſemitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypotheſis; & rationi quoque conſentanea eſt; nec enim ulla poteſt excogitari cauſa, cur in unas potiùs quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò ſi verum ſit omne patiens, aut percuſſum vim inferenti poſitivâ quâdam vi repugnare, perſpicuum videtur eò reſiſtentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejuſque conſequenter effectum abſolutè loquendo, tantùm illic

deprehendi.

deprehendi. Quod sinè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipsam hypothesin ad omnimodos incursus extendere; seu generatim effari, quod pulsus omnis & motus, utcunque medio cuilibet impingens, directè (per se nimirum, propriè, distinctéque rem estimando) continuatur, aut prorsum aut retrorsum. Scilicet, exempli causâ, si duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam pressione vel impetu adigantur, existimo medii cessione vel resistentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ semitâ antrorsum versus I K, vel retrò versus G D derivari, ac perpendicularis ipsius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii superficiem baculi perpendicularis tendentiæ magis opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulsum rectà continuari, sed obliquum alio detorqueri; vel assertionem ipsam non agnosco, vel non admitto consequentiam. Enimverò si per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, seu obstare recta pergenti, non minùs eo modo superficies E F opponitur baculo C D, quàm ipsi A B; rectum enim ejus progressum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm si quam aliam nescio quam imaginariam oppositionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè consectari. Profectò rem abstractè, nec ut accidentarium quid immisceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem considerare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim sola resistendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulsui solum punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii superficies obtinere situm concipiatur. Punctum autem Z æquè pulsui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K versus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H versus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par est, quibus uterque baculus ipsum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriusque pulsûs quoad oppositionem est ratio; similisque proinde utrobique resultabit effectus; pulsum nempe recto tramite vel transmittere, vel rejicere. Verùm longè secus eveniet, si baculum alterum obliquum, seu P D Y Q, cum ipso A B Y Z conferamus. Etenim superficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulsui magis opponitur, aut obsistit, quàm motui vel impulsui baculi P D Y Q. Quoniam illi toti cum tota sui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua discrepantia necessariò dispar effectus consequetur, ut nimirum pulsûs aut motûs directio mutetur. Quod discrimen eò lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adsimili) lucis radios.

Fig. 1.

dios diverſo medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; ſaltem eò ſpectantia lucis præcipua ſymptomata, tribus porrò ſubjiciendis hypotheſibus comprehenſa, vix aliâ ratione commodiùs explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc ſubinde generali nomine, compendii cauſâ, tam refractionem, quam reflectionem complector) fit in ſuperficie ad medii inflectentis ſuperficiem perpendiculari, ſeu recta. Hujuſce ſuppoſitionis haud ullam facilè ſatis commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehenſibili quâdam obſcuritate laborat quicquid fermè eò ſpectans afferunt; neque valdè miror radium lucis ſemper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidiſſe; quo poſito vix probam ullam ejuſce rei cauſam aſſignari poſſe credo. Cadat enim radius linearis A B in ſpeculi (inſtantiæ gratiâ) plani ſuperficiem ad punctum B; per quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D ſint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in iſto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F ſunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obſtat quo minùs in ſingulis omnibus, hoc eſt infinitis planis, ſpeculi ſuperficiem ſecantibus, & per rectam A B ſeu communem ſectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cùnctas reflexus diſpergatur? cur hoc fieri non poſſit, utique non capio. Quod reſpondetur enim, poſito plano A B C ad ſpeculi ſuperficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis ſpeculi ſuperficiei contrarium eſſe, proindè reſiſtentiam in eo maximam contingere, propterea̅que radium in eo potiſſimùm inflecti, parum ſatisfacit; quoniam, ut ſuperiùs inſinuatum, extra punctum ipſum B, cui radius impingit, alia nulla ſpecularis ſuperficici pars merito venit conſideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in univerſam quà longè latéque diſtenditur, ipſius ſpeculi ſuperficiem agit hic linearis radius, & ab ea viciſſim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quouſque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulſui tantùm id ſpeculi quod eſt in recta A B verſus G protracta reſiſtit, ideò pulſus in ipſam A B rejicietur; Et nulla ſuccurrit cauſa ſontica, propter quam aliorſum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam alio determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ aſſignantur, hujus effecti cauſis excutiendis abſtineam, indè genuinam ejuſce rationem (ut & generatim omnium

Fig. 2.

quæ

quæ circa radiorum inflectionem primitùs obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verùm dimensionibus omnimodis prædictum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum ABCDEFGH lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cujus latus BF applicetur speculo, dum interea reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogramum ABFE, nè recta procedat; indè continget rectam BF aliquò supra dictum planum resilire. Verùm in allas saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cùm inter plana latera ABDC, EFHG sibimet oppositа cursus ejus anteà dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obstet, quo minus inter eadem plana, tametsi sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri, locumque seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterùm est planum ABDC, eique oppositum EFGH speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideo lateralis recta BF in speculi plano existens, planis ABDC, EFHG recta. Quocirca si totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura prædictus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producetur, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostenderet subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus ABDC; cujus bases AMCN, BODP, axis XZ; ità scilicet, ut basis BODP speculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri BD, PO sese normaliter secent; ac per ipsam PO, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum POMN. Si jam per hujusce latera MO, NP ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta GBH communis sectio circuli BODP, planique

Fig. 3.

Fig. 4.

ſpecularis; hæc utique circulum continget; (quia ſpeculi planum, ex hypotheſi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeóque nec recta G H) quare rectæ G H, O P ſunt parallelæ. Ergò P O eſt ad ſpeculi planum parallela. Huic verò perpendicularia ſunt plana prædicta cylindrum contingentia per M O, N P ducta, axi parallela. Quapropter eadem ſpeculi plano recta erunt. Hinc, ut antea, ſi totus radius habeatur inſtar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in ſuperficie ad ſpeculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejuſmodi duo plana; quæ proinde ſi nulla ſupponatur, in unum illa coalescent. Accommodari poſſent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem ſupra deſcripſimus, utcunque nonnulla demutando; ſed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

1. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingreſſi ſumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheſes (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus inveſtigandis, nec non apparentiarum quarumcunque cauſis explicandis) neceſſarias, experientiæ quidem bene conſonas illas, etiam aliquo rationis ſuffragio communire; præſtratis utique fundamentis, ac ſuppoſitionibus inſiſtendo. Cùm itaque lucis radio corpus adſignatum ſit figurâ priſmaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis ſimplex, & naturæ totas ſuas in agendo vires exerenti præſertim conveniens;) cùm & exinde progreſſus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra ſuperficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus tranſverſæ dimenſionis illius, vel intervalli ſuperficies iſtas dirimentis ad rem noſtram, illam ſaltem quam nunc attingimus ſpectans effectus, aut uſus ſit) brevitatis & perſpicuitatis cauſâ, velut unam habere poſſumus; adeóque jam radium ut duabus ſolummodò dimenſionibus præditum, & ad inſtar Parallelogrammi cujuſdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis ſuperficiem recto jacentis, conſiderantes, reliquam itineris quod perſequitur determinationem, ultimam

nam illam & completam, investigabimus, ac exponemus; cujusce quidem circa reflectionem inquisitionis consectaria resultabit hæc propositio, passim ab Opticis recepta:

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad speculi, vel opaci reflectentis superficiem angulos constituunt æquales.* Hujus effati declarationem sic exequimur. Parallelogrammum rectangulum ABCD lucis repræsentet radium obliquè plano speculo EF incidentem. (Recta scilicet EF sit communis sectio plani ad speculum recti, in quo dictum Parallelogrammum existit, & in quo, secundum præmissa, reflectio peragitur, cum plano speculi.) Cùm itaque Parallelogrammi punctum B speculo primum impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præstruximus) retrò versus A per ipsam rectam BA resilire. Cùm autem interea rectæ BD supra speculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obstaculo pari vehementiâ cursum quoque suum adnitatur promovere per rectam CDH; palàm videtur utriusque conatibus adversis non aliter facilius aut propius satisfieri posse, quàm si utrumque circa punctum Z rectæ BD medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent cursu deflectent; siquidem rectæ BA, DC circulum B♂D♂ tangunt, centro Z per B & D descriptum. Cùm autem hujusmodi motum circularem obeundo punctum B describerit arcum B♂, & punctum D arcum D♂, hoc est quando recta BD obtinuerit situm ♂♂, etiam ipsum punctum D speculo impinget ad ♂; reditúmque proinde per arcum ♂D, scilicet ipsius quoque jam intercisò cursu, molietur. Sed & nunc temporis ipsum punctum B ad ♂ positum per arcum ♂D tendit, quorum certè motuum adversantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo saltem, quoad fieri poterit, utrumque progressus arripient; proximi vero sunt qui per tangentes ♂α, ♂α; qui & sibi nihil repugnant, at potiùs omninò secum conspirant; itaque punctum B per rectam ♂α, punctúmque D per rectam ♂α procurrent, adeò ut totus radius ABDC jam acquirat situm α♂α; & per hanc orbitam rectà motum suum prosequatur. Liquet autem angulos ABF, α♂E æquari. Nam æquantur anguli ZB♂, Z♂B; quapropter adjunctis hinc indè rectis ZBA, ♂♂α totis ABE, α♂E partes erunt. Unde patet è duobus quoque rectis residuos ABE, α♂F æquari; quod propositum fuit ostendere. Fig. 5.

III. Ità de præmissis suppositionibus nostris fundamentalem hanc Catoptricæ legem seu regulam elicimus, quam verisimiliter aut concinnè

cinnè penes vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod supereſt partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Fig. 6. Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranisum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus, quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto, Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium istthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, interea verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D d, punctum B

tardiùs

tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum B c delineet; quibus peractis recta B D tenebit ſitum c δ. Cùm verò jam punctum D denſius quoque medium interet ad δ; proindeque pariter & ipſum retardetur; motus iſti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velocius feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs ſimul arcum deſcribet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deferentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δ ϰ, c ϰ; radiuſque totus A B C D hoc modo detortus, & ſitum ϰ c δ ϰ nactus per hanc poſteà ſemitam rectà decurret. Adnotandum eſt autem quarcunque ſit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D δ, B c (vel ſemidiametros Z D, Z B) eandem ſemper habere proportionem inter ſe; talem nempe, qualem in denſitate, ſeu reſiſtentia peculiare diſcrimen exigit. Etenim ſupponatur in quovis ſuperficiei pellucidæ loco poſitum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypotheſi ſit homogeneum (hoc eſt ubique pariter obſiſtens) nulla poteſt, opinor aſſignari ratio cur hoc mobile non in quaſvis partes æquâ velocitate deferri poſſit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit iſthac dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino reſiſtentiam invenient; punctum, inquam, B, ſeu verſus Q, ſeu verſus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio ſemper eàdem, quarcunque fuerit ejus poſitio, celeritate promoveatur, ſatis apparet motus iſtos, aut morum ſemitas eodem tempore decurſas, arcus nempe circulares D δ, B c ſemper eandem inter ſe proportionem ſervare, nimirum illam, quam habent ſemidiametri Z D, Z B, vel Z δ, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem eſſe patet tum illa, quam habent recti ſinus angulorum ipſis Z δ, Z B in triangulo Z δ B oppoſitorum, ipſorum ſcilicet Z B δ (vel Z B E) & Z δ B. Eſt autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc eſt angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z δ B eſt complementum anguli F δ ϰ, vel inclinatio rectæ δ ϰ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propoſitum. Patet verò, quod in hoc caſu, angulus E B Z major eſt angulo B δ Z; vel, ductis B M, δ N ad E F perpendicularibus, quòd angulus M B G major eſt angulo N δ ϰ, adeóque quòd hic refractio verſus perpendicularem, quod aiunt, contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium tranſit, ipſi magis obſiſtens, ſeu denſius. At ſi medio incurrit faciliorem tranſitum præbenti, ſeu rariori, planè ſimili modo, ſed inverſè ſe res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod

Quod (licèt brevius) confieretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, pérque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in ∝ C ∝ ♂, quòd etiam hic radius ∝ C ∝ ♂ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeò verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ, præſertimq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ prius figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velocius procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod in recta B D, puta circa Z; ità ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B C, & punctum D arcum D ♂; puncto D ad ♂ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z, amboque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes C ∝, ♂ ∝ (rectæ Z C perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z ♂, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z ♂, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B ♂, Z ♂ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ ♂ ∝; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hic ang. Z ♂ F major eſt angulo Z B ♂, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

Fig. 9.

V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

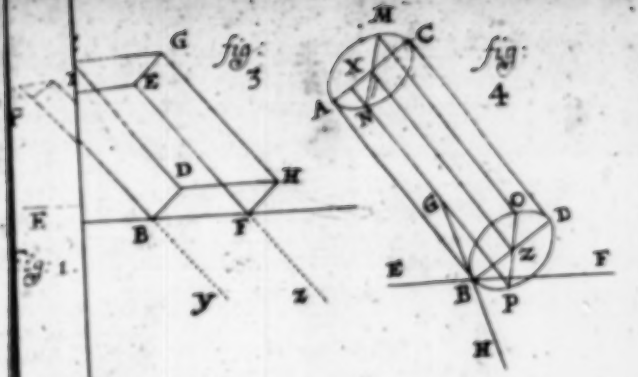
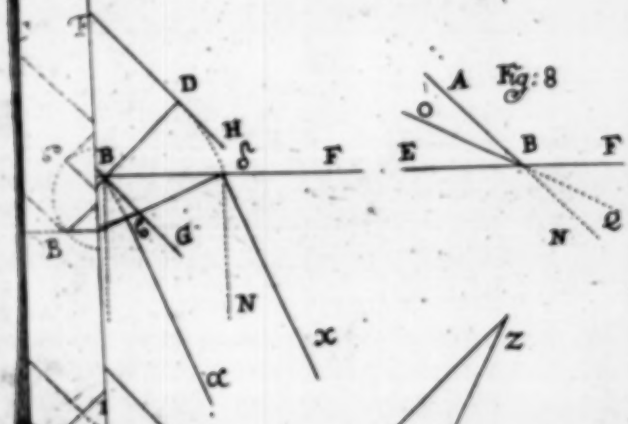
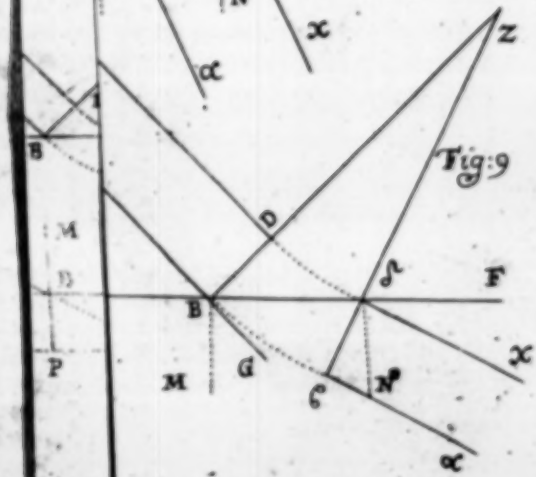


fig: 3
fig: 4
fig: 1
G
E
D
H
F
B
y
z
M
C
X
A
N
G
O
D
Z
E
F
B
P
H


D
H
B
F
G
N
x
α
A
Fig: 8
O
E
B
F
N
Q


Z
Fig: 9
B
D
M
F
B
x
P
M
G
N
α

Quod (licèt brevius) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, perque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in « C « ♂, quòd etiam hic radius « C « ♂ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis &c. ipſum indigere videtur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeò verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ, præſertimq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ priùs figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velociùs procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod
Fig. 9. in recta B D, puta circa Z; ità ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B C, & punctum D arcum D ♂; puncto D ad ♂ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; ambóque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes C «, ♂ « (rectæ Z C perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z ♂, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z ♂, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B ♂, Z ♂ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ ♂«; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hic ang. Z ♂ F major eſt angulo Z B ♂, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

V. Advertendùm eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

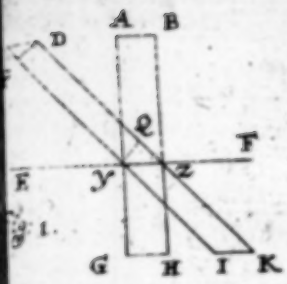


fig. 1.

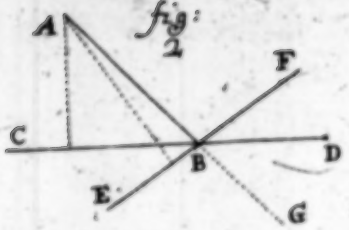


fig. 2

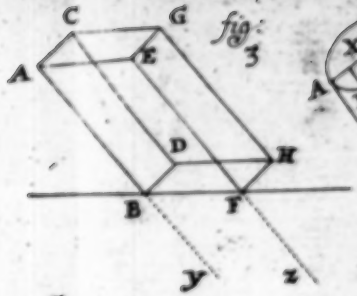


fig. 3

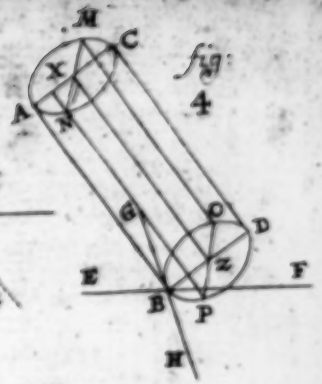
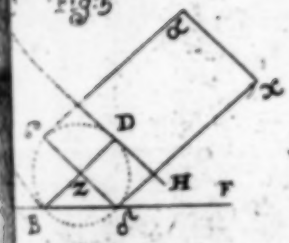
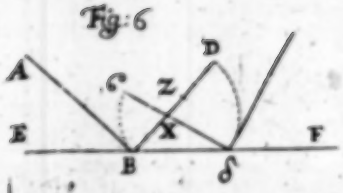
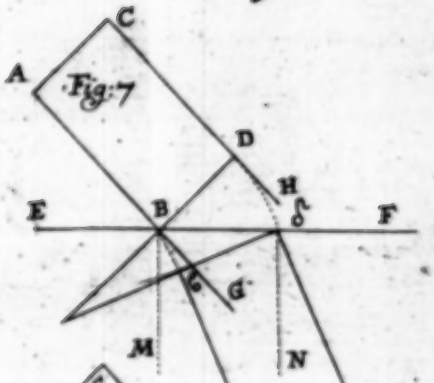
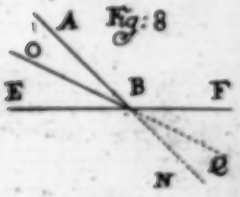


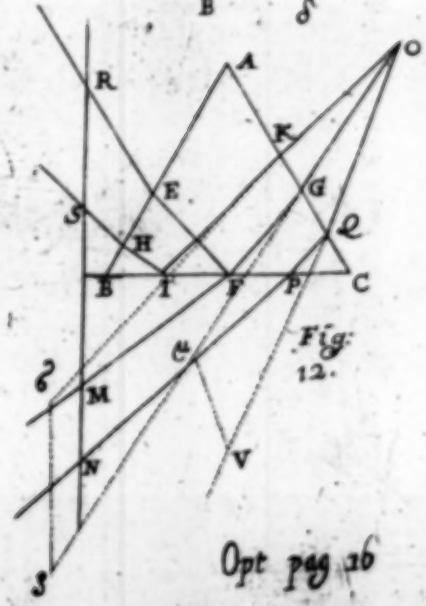
fig. 4

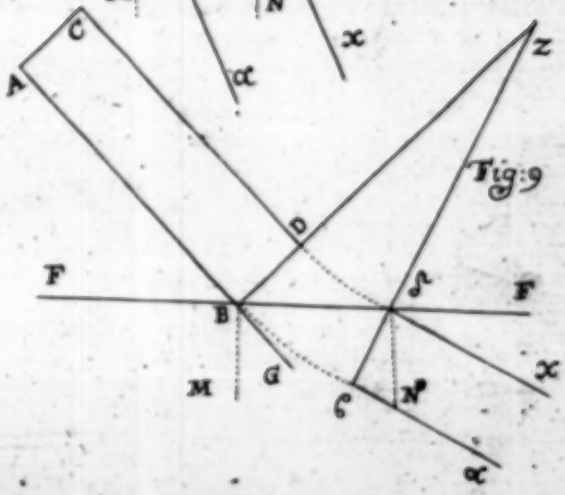












Opt pag 26

cujusmodi quippe de causis diaphanum subinde forsan evasurum est opacum, & instar opaci radios valebit repercutere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro subtracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit superficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protensa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, si major hic renitentia deprehendatur, quàm ubi radius alter M B P perpendiculariùs incurrit, quando major sit B Q, quam B P.] At nos seclusis istis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter resistens, absolutè perspicuum, & radios ex se non respuens accipimus; quibus suppositis perpetuò, quod dixi, radius, obliquitate quàpiam incidentiæ nil vetante, medium densius penetrabit. Verùm in alterò casu, cùm de medio densiori lux rarius incurrit, non semper ea medium hoc permeabit. Nam si magna satis fuerit obliquitas; subinde radius inflexus supra superficiem E F attolletur, angulúsque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exsuperabit; quinimò fieri potest ut ipsum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel semirecta; Et Z B ad Z D se habeat ut quadrati diameter ad suum latus (quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aërem transeuntium, experientiâ contestante, rationem metitur) radius velut in ipsam E F refringetur, aut eam stringens procedet. Est enim Z ♂ (æqualis ipsi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque ♂ ∝ arcum ♂ D contingens ipsi E F congruet. Unde patet obiter, id quod superiùs insinuatum, non universim constare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud processit, ad eundem retrogradus accedet. Hîc enim saltem in casu radius A B refringitur in C ∝ superficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per ∝ C progreditur minimè recedet ad B A, nec ullam, ut manifestum est, omninò refractionem patietur. Sed hic casus tantùm unus, & quasi pro nullo censeri potest. Quod si, servatâ quoad densitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus supra ipsam E F assurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decursâ rarius intra medium peripheriâ B C in densum remeabit, in quo proinde rursus, circulatione suâ dimissâ, per tangentes C ∝, ♂ ∝ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium densius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etsi quodammodò, velutique primariò, sit refractio) reflectionis nomen adsciscit hæc actio, quatenus & ipsa

reflectionis leges examussim observat. Nam quoniam isosceles trianguli Z B C anguli Z B C, Z C B sunt æquales, etiam anguli (de rectis residui) A B E, a C F pares erunt; quod reflectioni proprium est. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen causam, fortassis ab iis prætermissam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis causa diversam; nè quisquam hæsiter, aut hoc adsumenti gravetur concedere.

Kepl. prop. 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum saltem breviter attingam satis illustre, neminisq; non examini patens. Esto triangulum A B C sectio prismatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, seu crystallini) basi parallela; in hujus autem base sumatur punctum quodpiam F, & sit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hic insinuatam, & posteà clarius exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo scilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quasi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O statuatur oculi centrum O, & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipsorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti secundum principia nostra posthac constabit) progredientes divergent; etitque propterea ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à se divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpositum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad μ ρ, situ neutiquam immutatum. Rursus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus sit K I; hic itaque rursum à G F diverget, ac inde erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad τ σ, situ partium everso. Consequuntur hæc doctrinam nostram, & experientiæ liquidò consentanea deprehendentur, quin & observatu dignum erit, è duplici refractione spectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro scilicet ad μ, cæruleo ad ρ, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, sed reflectione tamen intercedente, apprehensi imaginem τ σ colore nihil ab ipso objecto differre. Quod ex eo sanè videtur evenire, quoniam ang. F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingressus est;

Fig. 13.

seu

ſeu quicquid retractio ad E effecit, id refractio ad K retexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verùm hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, ſaltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cùm ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (à quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quòd enim vitrum *e. g.* radios intra corpus ſuum receptos, ejuſque poſticæ ſuperficiei obliquius incidentes retrocedere cogat, hujuſmodi rationem exhibent: aiunt vitrum radios facilius admittere, vel tranſmittere quàm aërem; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere; quòdque proinde qui poſt vitrum adventanti radio ſit obvius aër cum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùs conſentanea videtur. Quum enim aëris corpus ex æthere puro maximam partem, è corpuſculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur; ex his partibus æther, opinor, non minùs promptè quàm vitrum radios tranſmitti; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficilius; adeóque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùs interſparſæ, præſertim in aëre ſudo ſummiſque montium excelſorum jugis) ſunt opaeæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnicunque pariter incidentiâ rejiciunt; adeò ut nec ad has quam reſpicimus lucis inflectio propriè ſpectet; ergò nihil ſubeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentius obſiſtat. Addo; ſi talis aëri vis reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam adſignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut pleriſque viſum erit, poſtulato; quòd purus Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſuprajectus haud minùs facile quàm vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte; per puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum O P; in atmoſphæræ, vel aëris circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam Z N M; itaque cum radius quilibet, ut S M, vel S N (Horizontalis puta, vel eo ſuperior) in ſuperficiem M Z cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmoſphæræ Semidiameter C Z præ telluris Semidiametro C O dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cùm & aër idcircò, juxta ſententiam quam expendimus, Fig. 14.

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & consimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satis constare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendicularem N C refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in trancursu dicta sunto.

IX. Porrò, subnotandum est, quoad binos casus suprà tractatos, cùm duo media, diversimoda comparando duæ se representent proportiones, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis sic habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut A ad B, in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major est quàm Z B, in prima Hypothesi, tanto constat Z D minorem esse quàm Z B, in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit superficiem hactenus adsumpserimus planam, advertendum superest, quamvis illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R, quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, nisi quòd isthic arcus D ♪ in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quamque perexiguo distet intervallo punctum ♪ à curvæ vertice B, nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iste circulus esse debet, in quo chorda B ♪, radii latitudine paullo major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus Z B ♪ æqualis supponi angulo Z B F; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unà rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ità tamen precariò, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper adsensu firmo concedatur. Fig. 15.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata malitis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica cujuscunque

cujuſcunque generis ſcientia, qualitercunque declarare ſtuduimus, & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ ſententiâ ſaltem, omnium qui legenti ſe vel cogitanti ſuggeſſerunt, ſimillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quàm experimentis Phyſicis, & cùm ipſa rerum natura congruentiſſimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm poſtquam inter alios iſta lucis ſymptomata explicandi modos hic ipſe ſemet ingeſſerat, eum examini ſubjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto ſane præter expectationem) adeò quadrantem comperiſſem. Meæ tamen eum tam fuſè diducendi pepercíſſem operæ, ſi quæ doctiſſimus *Maignanus* hiſce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priuſquam hæc aggrederer contigiſſet inſpexiſſe; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curioſius evolvi) ſupplendis his, & confirmandis accommodata. Porrò fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percenſere, ac perſtringere (quarum mihi nonnullæ craſſâ petitione laborare; multùm aliæ à re propoſita abludere; quædam animum ſubtilitate potiùs confundere, quàm vi conſtringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimiſquam immoratus, hactenus inſinuatis contentus, omnes tranſiliam; illius ſaltem eruditiſſimi viri nefas fuerit non aſtipulari penitus, & acquieſcere decreto; "qui, De-"um unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem ra-"diis diverſa media permeantibus præſcripſiſſe; ut omnes omnino "radii veri, & apparentes eandem ſemper inter ſe ſervent analogiam. His, inquam, dimiſſis, ſuccedit ut è præſtructis emanantia quædam Poriſmata ſubnectamus.

LECT. III.

I. HYpotheſes Opticæ primarias, & fundamentales quaſi leges expoſuimus hactenus, & excuſſimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum cauſas tam verè quàm expeditè diſcernendas conducentia) ſubjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut uſum præ ſe ferunt potiſſimum ſeligentes. Radios autem jam conſideramus, ut unicâ dimenſione præditos (ſiquidem reliquæ, quibus Phyſicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hic inſtitutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aſpectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admiſſo, ſinguli cujuſque radii inflectio in ſuperficie peragatur ad planum inflectens recta (uti conſtat è præmiſſis) cùm & nobis præſertim mox inſtitutum ſit ſingulorum punctorum radiationes conſequentia ſymptomata ſic expendere, ut locos ipſorum apparentes determinemus, oculi reſpectu centrum habentis in ejuſmodi plano uſpiam conſtitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis ſuperficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas reſpectivè congruas, brevitati conſulentes & perſpicuitati, ſubſtituemus. Porrò cùm quo præciſè modo peragatur viſio, quibúſque prædita ſit affectionibus adhuc expoſitum non ſit; Et de illa tamen ſubindè craſſius aliquid ac generalius dicendis intexere fortaſſis ex uſu fuerit, illa ſaltem pervulgata, poſt hac curioſiùs expendenda, jam προλαμβανόμενα adſumemus; nempe: Viſibile punctum in illo radio ſitum apparere, qui procedens ab ipſo (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; ſitum objectorum è radiorum ità tranſeuntium poſitione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipſorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum reſpectivè majores, minores, aut æquales conſtituentibus; diſtinctam unius cujuſque puncti viſionem radiis effici modo naturali, hoc eſt, divergenter, oculo illabentibus; Et ſiqua ſunt his agnata pariter obvia, ſeu manifeſta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis paſſim receptis & uſitatis definiendis aut explicandis abſtinentes, ipſorum ſupponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ cauſâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è veſtigio.

II. Imprimis autem (poſthac quidem in decurſu, quoad plures ſibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi ſingulari, quæ tractanda veniet, ſuperficiei incidentes (radios, ſingularia quovis inflexos deſignandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis propoſito competentem inflexum aſſignandi modos proponemus; quorum adhiberi poſſit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. ∝ B Q = ang. A B Q, vel per B ducta ſit E F reflectentem tangens; & fiat ang. ∝ B F = ang. A B E; liquetque factum eſſe, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & ſuper diametrum (in hac liberè ſumptam) Q B deſcribatur ſemicirculus, incidentem A B ſecans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R :: Q R. T (terminis autem I, R hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipſam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque ſumpta B K ſit circuli diameter, incidentem A B ſecantis ad R, & ſiat I. R :: B R. T; & adaptetur B S = T; erit S B ∝ ipſius A B refractus: Vel demum: In ipſa A B ſumptâ utcunque diametro R B, ſuper hac deſcriptus circulus ſecet perpendicularem Q B ad Q, vel tangentem E F in K; fiatque I. R :: B K. T. & adaptetur Q S = T; erit rurſus S B ∝ incidentis A B refractus. quorum ratio è poſitis inflectionum legibus admodum eſt manifeſta. verba piget impendere. Fig. 16. Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujuſvis incidentis inflexus inflexi viciſſim incidens evadet.

Hoc plerique, diverſè paullò prolatum, accipiunt, aut poſtulant. è præmiſſis autem facillimè colligitur. Idque potius methodi gratiâ (ſicut & nonnulla quæ ſequentur) quàm quia res meretur, oſtendemus. Pro reflectione; Radius A B ſpeculo E F impingens reflectatur in B ∝; dico radium B ∝ permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B ∝, erit ang. ∝ B F æqualis angulo A B E. Poſito jam ∝ B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo ∝ B F; proinde non alius erit ab ipſo A B E quare B A ipſius ∝ B reflexus erit. *Alhaz.* VII. 4. *Hevig. Catop. axiom.* 2. Fig. 1. 16.

Pro

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B; & ifthic refringatur in B α; dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occurſum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis; & in hac utcunque ſumpto puncto P ducatur P G ad A B prorractam perpendicularis, ut & P H ad B α; & producatur α B S. Eſt ergo P G ſinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P; & P H ſinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è ſuperiori medio factam in inferius; etiam viciſſim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in ſuperius. Unde ſi radius α B jam ponatur incidens; cùm ſint P H, P G recti ſinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum eſt ipſum H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde reſpectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc eſt reflectionis reſpectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis ſecùs accipiat, apud nos angulus eſt, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propoſitum ſpectat effatum, id è poſitis principiis manifeſtè conſectatur. Etenim in reflectione ipſi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales ſunt; in refractione ſaltem recti ſinus angulorum refractorum ſinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquidò conſtat propoſitum: quorſum verba, quorſum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad ſuperficiem mediam ſeſe decuſſant, iidem ſeſe inflectionem paſſi decuſſabunt, eodem ordine ſervato, quem directè progedientes habuiſſent (utique ſic ut perpendiculari poſt inflectionem propior incedat qui propior antèa fuit.)

Hæc propoſitio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia noſtra uſurpante aliunde comprobari.

Herig. Diſp. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens eſt; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ reſpondet. Pro refractione vero: ſit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (ſcilicet A B obliquius

obliquiùs quàm D B.) Horum verò refracti ſint B α, B ♪; dico angulum C B α majorem eſſe angulo H B ♪. Nam ad B P in perpendiculari liberè ſumptam diametrum conſtituatur ſemicirculus B G P; cui occurrant ipſæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipſæ B α, B ♪ punctis α, ♪. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B ♪, vel arcus G K arcui H ♪; connectatur etiam recta ♪ G, ſecans ipſam P K in X; ducatnurque denuò ſubtenſæ G ♪, H ♪. Jam ob angulos P G ♪, P H ♪ pares (arcui quippe P ♪ inſiſtentes ambos) & angulos G P K, H P ♪ ex conſtructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P ♪ inter ſe ſimilia. Quapropter erit P G. P X :: P H. P ♪. eſt autem è lege refractionum P H. P ♪ :: P G. P α. quare P G. P X :: P G. P α: unde P X = P α. eſt autem P X minor quàm P K (quia tota ſubtenſa G ♪ intra circulum jacet.) Quare P α minor eſt quàm P K; adeóque P K ſecabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc eſt arcu H ♪. & idcircò major erit angulus G B α angulo H B ♪: Q. E. D. Fig. 21. Fig. 22.

Procedit hæc demonſtratio quoad caſum, ubi I ⊏ R (vel cùm radius è medio rariori denſius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque caſum facilè deducitur concluſio. Nam ſi viciſſim α B, ♪ B concipiantur incidentes, erunt ipſæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, ♪ B H erunt anguli refracti.

Hujuſce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonſtratio. Conſer ſodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit poſuimus. *Diopt. Prop. 4.*

VII. In iſto refractionis caſu, quum I minor eſt quàm R, ſi anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus ſinus P H, ad ſinum totum ſe habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit. Fig. 23.

Nam penetret (ſi fieri poteſt) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G. P α :: (I. R ::) *P H. P B. eſt autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipſi E F ſubjectum. * *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum ſuum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum ſuum.

Erit ſcilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P. α B P. ⊏ ang. H B P. ♪ B P. Nam triangula Fig. 21, 22.

GP ☌, HP ☽ ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GP ☌ minorem HP ☽ comprehendet) tum centro P per ☽ describatur circulus E ☽ F ipsas PG, P ☌ secans punctis F, E; item connexâ EH, centro H per ☉ transeat circulus H M N ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa E ☽ cum PG conveniat in L. Estque jam ang. ☌ P ☉. ang. ☽ PH :: sector EP ☽. sector ☽ PF ⊏ triang. EP ☽. triang. ☽ PL :: E ☽. ☽ L :: triang. EH ☽. ☽ HL ⊏ sector MH ☽. sector ☽ HN :: ang. EH ☽. ang. ☽ HP. est igitur ang. ☌ P ☉. ang. ☽ PH ⊏ ang. EH ☽. ang. ☽ HP. ergóque compositè ang. ☌ PG. ang. ☽ PH ⊏ ang. EHP. ang. ☽ HP. permutandóque ang. ☌ PG. ang. EHP ⊏ ang. ☽ PH. ang. ☉ HP. est autem HP. PE :: HP. P ☽ :: I. R :: GP. P ☌. adeóque EH ad ☌ G parallela; vel ang. EHP = ang. ☌ GP. ergò erit ang. ☌ PG. ang. ☌ GP ⊏ ang. ☽ PH. ang. ☽ HP. hoc est ang. ☌ BG, ☌ BP ⊏ ang. ☽ BH. ang. ☽ BP. vel componendo ang. GBP. ang. ☌ BP ⊏ ang HBP. ang. ☽ BP. Quod erat demonstrandum.

Corol. 1. Ang. ☌ BG. ang. ☌ BP ⊏ ang. ☽ BH. ang. ☉ BP.
2. Ang. ☌ BG. ang. PBG ⊏ ang. ☽ BH. PBH.

Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnâsse: "In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsissima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe nostrum;) in his enim angulus refractionis major est subtriplo anguli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis compertum est. Hæc, inquam, ille ῥαῖστος. Quasi verò dixisset; numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo similius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15.) quod sit angulus refractionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare solemus) necessariò, sicuti modò demonstratum est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium institutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24'; angulúmque proinde refractionis 10. 36', qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clarissimus vir Hypothesin hanc (à

Cartesio

Cartesio quidem primò repertam, sed ab aliis plerisque recentioribus opticis *Mersenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipso ejus consodale doctissimo *Ricciolo* susceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parùm interest veram deprehendi) labefactatum iret; eam potiùs imprudens experientiæ Suffragio communivit. Quinimo si quid insit huic principio vitii, illud potius erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen discrepantia num ipsius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibusdam intervenientibus causis adscribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortassis cognata reflectionis lex, à nemine non admissa, experimentis omnibus præcisè responderet. Nobis sufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præsertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam consentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ conclusiones cum experientia mirè conspirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam discordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud suppetat, Geometricis, ratiociniis præsternenda) non verebimur ubivis ut ratam sumere, ac adhibere; satis certi (apud nos saltem) in elicitis ab ea conclusionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emersurum.

IX. Obiter hìc & μεταβατικῶς problemation quoddam interseram (quia Schema num. 6. superius ei gratis inserviet, ejusque constructio è superiore constructione derivatur.) Per datum in retringente punctum (B) incidentem ducere, cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci posse supponimus, aut postulamus) & ad diametrum B P construatur semicirculus; & sit utcunque P G . P α :: I . R (pro P G verò præstat ipsam diametrum P B accipere) sumatúrque Arcus G K subtendens angulum parem dato. Fiat autem P X = P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in ϑ. demum accipiatur Arcus ϑ H = G K, erit ductæ B H refractus B ϑ (uti præcedentem discursum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum esse quod erat propositum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig. 21.

X. Cujuscunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, sitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque sumpto puncto C, per hoc transeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipsius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N = K C; in refractione verò K N . K C :: I . R. (vel item, si in ipso inflexo Fig. 24, 25.

ſumatur utcunque punctum K; & ab eo ducta KL ad perpendicularem CN parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic KN = NL; & hic KN. NL :: I. R.)

Fig 24, 25. Nam 1. in reflectione; quoniam ang. ONC = KNC (ex lege reflectionis.) Et ang. ONC = KCN (ex Hypotheſi quòd ON, CB parallelæ ſunt) erit ang. KCN = ang. KNC. adeóque KN = KC = NL: Q.E.D.

2 In refractione; ducantur CE ad NO, & CF ad NK perpendiculares (unde liquet puncta E, F exiſtere in circulo ſuper diametrum CN deſcripto) quare, connexâ EF, erunt anguli CEF = ang. FNC (eidem inſiſtentes peripheriæ FC) æquales. Item propterea eſt ang. ECF = ang. FNE = ang. NKC. quare triangula ECF, NKC ſunt æquiangula ſibi mutuo; quamobrem eſt CE. CF :: KN. KC. atqui (juxta legem refractionis) eſt CE. CF :: I. R. qua propter erit, KN .. KC :: I. R : vel KN. NL :: I. R: Q.E.D.

XI. Quod ſi per N ducatur tangens UT, erit (in reflectione) etiam KT = KN; & NT angulum MNK biſecabit. In refractione verò erit KT ad KN, ut co-ſinus anguli refracti, ad coſinum anguli incidentiæ. Quæ ſaltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Exhis facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem ſatis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortaſsè per nimias ambages.

1. Demonſtratæ proſtant. Ut in parabola (puta RBS, cujus axis BC) incidat MNO axi BC parallelus; ejuſque reflexus ſit NK; erit igitur (ex oſtenſis) KN = KC. at ſi punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notiſſimam hujuſce curvæ proprietatem) KN = KC. quare paralleli radii reflexus neceſſariò per umbilicum tranſibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig 26. 2. Item *in ellipſe*, cujus axis BD, foci H, K, ſi ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ HN, KN; ſatis celebre eſt, quòd perpendicularis CN angulum HNK biſecabit. Unde NH. NK :: HC. CK. & componendo NH + NK. NK :: HK. CK. vel BD. NK :: HK. CK. vel permutando BD. HK :: NK. CK. quare ſi talis fuerit ellipſis, ut ſit BD. HK :: I. R. etiam erit NK. CK :: I. R verum ſi incidens MN ad BD parallelus refringatur in NK, erit (juxta mox oſtenſa) etiam NK. CK :: I. R. patet itaque quòd ipſius MN refractus per focum K tranſibit. Quid plura?

3 Non

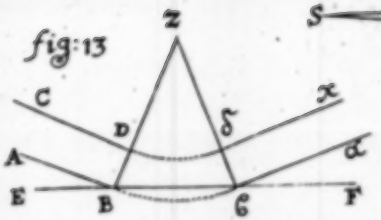


fig: 13

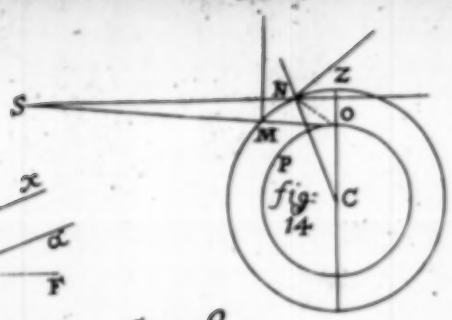


fig: 14

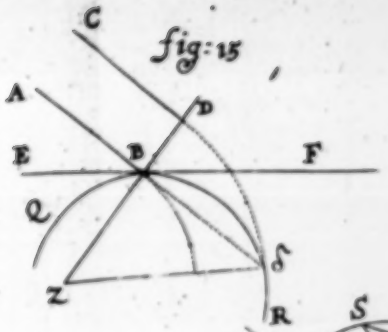


fig: 15

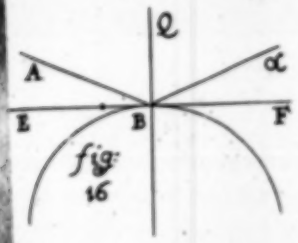


fig: 16

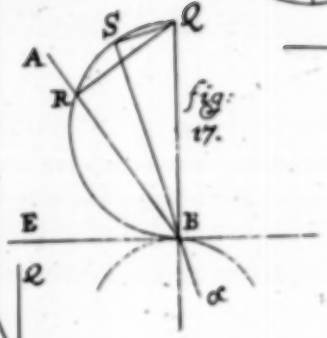


fig: 17.

T

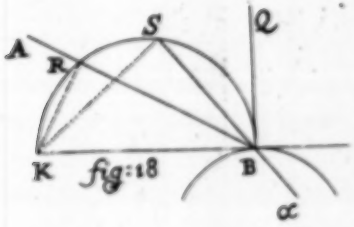


fig: 18

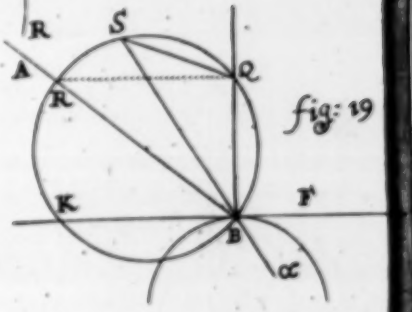


fig: 19

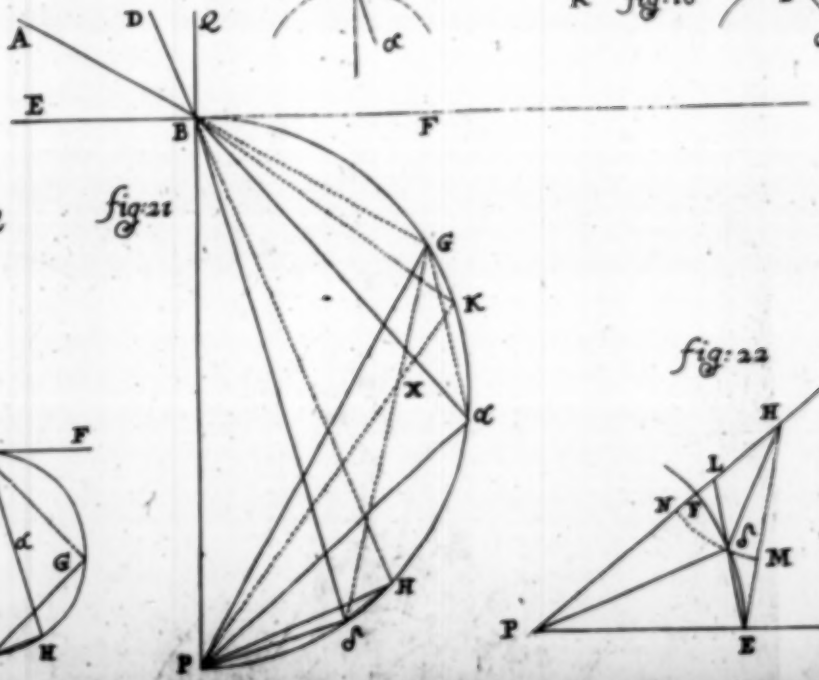


fig: 21

fig: 20

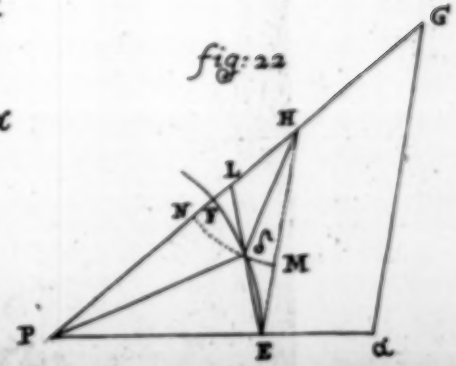


fig: 22

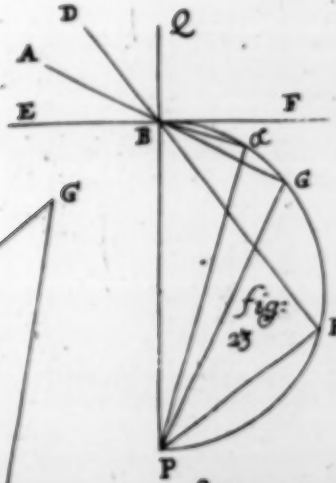


fig: 23

Opt pag 28

3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquisque velut anteà præparatis) ostenderur fore perpetuò N K. C K :: B D. H K. unde si fuerit (ex *Hyperbola* constructione) B D. H K :: I. R. erit etiam N K. C K :: I. R. quòd si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K. C K :: I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbola* focum transibit. Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsi* aut *Hyperbola* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radius in alterum reflectatur, admodum facilè diluescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (β α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis, cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico fore B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A B N Z sibi mutuò æquilatera fore; & esse A B = B Z: Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes. Fig. 29.

Quoad punctum longè distitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quòad punctum è sensibiliter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI.

XVI. Hinc punctum Z erit ipſius A (reſpectu oculi uspiam conſtituti) imago perfectiſſima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quàm locum à quo plures radii (quot ſcilicet afficiendo viſui ſufficiunt) ſimiliter divergere, ſeu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujuſvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, viſus imaginem adſpectantis axis, ſeu reflexus principalis (iſte nimirum qui per oculi centrum (puta O) tranſit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iſte; nec non ejus cum E F interſectio N, punctum reflectionis.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam ſubjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, ſed alioquin ſitu indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbola*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & biſecentur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Aſymptotis C G, C H per ipſum O deſcripta concipiatur *Hyperbola* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta tranſibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbola* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulnm A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipſam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbola* natura, eſt C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O — D N. D N; hoc eſt O Q. C Y :: N Q. D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rurſus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc eſt A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare eſt O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N ſimilia ſunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Fig. 30.

Mereri ſaltem vel *Hyperbola* gratiâ videbatur hæc ejuſce proprietas adnotari; quin & Analogiæ cauſâ verſus ea quæ ſequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam præterea. Ad refractiones tranſeo.

LECT.

Lect. IV.

I. AD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam ſuperficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentiùs proſequemur, quia nondum pro merito ſuo videtur ſatis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præſtituemus nobis, & quaſi normam in ſequentibus obſervandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) ſunt etiam ſibi paralleli. Nam quoniam A B, M N ſunt, ex hypotheſi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (ſcilicet anguli α B F, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ ſibi parallelos eſſe. Fig. 31.

III. Hinc infinitè diſtantis, hoc eſt parallelos radios emittentis (infinitam ad ſenſum diſtantiam intelligo, qualis eſt quoad hoc ſtellæ cujuſpiam) puncti locus apparens, aut imago per hujuſmodi refractionem effecta infinitè quoque diſtat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adſpectetur. Itaque ſitus ejus reſpectu visûs ubivis poſiti facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immenſè diſſitum; connexáque A O refringentem E F ſecet in G; ſitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protenſa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B ſint (ad ſenſum) paralleli, etiam ipſorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α ſit refractus ipſius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protenſa apparebit. Quoad hujuſmodi radiationem nil ſuccurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti ſymptomata contemplemur. Fig. 32.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua ſit punctum radians A, ab E F haud ad ſenſum longè remotum; ab hoc autem Fig. 33.

autem procedentis cujuſvis radii (ceu A N) refractus N a cum ipſa A B
Lib. 3. num. 9. (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I. R. (Neque non inverſè, ſi fuerit N K. N A :: I. R; erit K N a i. ſius N A refractus.)

Hoc è ſuperiùs oſtenſis immediatè conſectatur. Et hinc etiam ſatis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut paſſim in ſequentibus aſſumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum ſit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm itaque ſit hinc ſinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad ſinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A ſeſe habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam ſi latera N K, N A ſe habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum ſinus ità ſe habebunt; unde conſtabit ipſam K N a ad A N pertinere.
Fig. 34, 35.

V. Hinc particularis emergit expeditiſſimus modus hujuſmodi quotcunque refractos deſignandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B. Z B :: R. I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens deſignandus eſt refractus. Eum ſic dedeſignaveris: Protrahatur N A (ſi opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S deſcribatur circulus ipſam A B ſecans in K (ſecabit utique ſi refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim eſt K N. A N :: S N. A N :: Z B. A B :: I. R :: K N. A N. unde liquet (è præcedente) propoſitum.

VI. Exhinc etiam hujuſmodi refractionis præcipua ſymptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ ſeorſim acceptis, & quæ ſecum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo caſu (quum nempe refractio fit è rariori in denſius, ſeu quum I ⊏ R) concurſus refractorum cum recta A B (quam ſubinde radiationis hujus axem appellare licebit) ſupra punctum Z exiſtit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major eſt, erit N S (vel N K) ⊏ N Z; adeóque B K ⊏ B Z. Item, in ſecundo caſu (quum media contrariè ſe habent) dictus concurſus infra punctum Z exiſtit. Etenim rurſus connexâ N Z; eſt ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z ⊏ N S, vel N K; & ideò B Z ⊏ B K.

VII. Hinc liquet punctum Z eſſe limitem ultra vel citra quem (reſpectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quòd
Fig. 35.

ipſius

ipſius perpendicularis AB (quaſi) refractus in ipſum punctum Z terminatur. Porrò:

VIII. *Lemma*: ſit AB ad EF normalis, & à duobus in AB ſumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipſi B) ad duo puncta quæ vis M, N in ipſa EF acceptis (quorum vero M ſit ipſi B vicinius) connectantur rectæ AM, AN; & IM, IN; dico fore AN. AM ⊏ IN. IM.

Nam centro N per A deſcribatur circulus PAOR (rectas IM, IN interſecans punctis O, R) & per R ducatur RT ad EF parallela, ſecans IM in S. Et ob angulum NRT obtuſum, patet rectam RT extra circulum totam excidere; unde SM ⊏ (OM ⊏) AM. adeóque AN. AM ⊏ AN: SM:: RN. SM:: IN. IM. liquet igitur eſſe AN. AM ⊏ IN. IM: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum AM, AN (quorum hic obliquior) refracti Mα, Nα cum axe AB conveniant punctis I, K, erit in primo caſu IB ⊐ KB; in ſecundo IB ⊏ KB. Etenim connexâ IN; eſt in primo caſu, NK. MI:: NA. MA ⊏ NI. MI. adeóque NK ⊏ NI. unde BK ⊏ BI. aſt in ſecundo, NK. MI:: NA. MA ⊐ NI. MI quare NK ⊐ NI; & indè BK ⊐ BI. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo caſu concurſus extra angulum ABN verſantur; in ſecundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decurſu liquidius, ac multifariàm conſtabunt.

X. Porrò, bina quoad hos caſus *Theorémata* ſubjiciemus, uſus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo caſu) YB. AB:: I. √Iq—Rq. ſit autem cujuſvis incidentis AN refractus KNα; & connectatur YN: erit KB. YN:: √Iq—Rq. R. Fig. 39.

Nam ob YBq. ABq:: (a) Iq. Iq—Rq. erit per converſionem rationis YBq. YBq—ABq:: Iq. Rq:: (b) KNq. ANq. & permutando YBq. KNq:: YBq—ABq. ANq. componendóque YBq+KNq. KNq:: YBq+BNq. ANq. (nempe YBq—ABq+ANq=YBq+BNq; quoniam ANq—ABq=BNq) Quarè rurſus permutando eſt YBq+KNq. YBq.+BNq:: KNq. ANq. dividendoque KNq—BNq. YBq+BNq:: KNq—ANq. ANq; hoc eſt KBq. YNq :: Iq—Rq. Rq: Q. E. D.

(a) *Hypoth.* (b) 4 *hujus*

XI. *Corol.* 1. Hinc ſi duo refracti Mα, Nα cum Axe AB conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ YM, YN; erit KB. IB :: YN. YM. Nam KBq. YNq :: Iq — Rq. Rq :: IBq. YMq. quare permutatim KBq. IBq :: YNq. YMq.

Fig. 40.

XII. 2. Hinc etiam ſi refracti MI, NK conveniant in X; & demittatur XP ad AB parallela; & huic protractæ MY, NY occurrant in R, S; erit NS = MR. Nam XP. SN :: KB. YN :: IB. YM :: XP. RM. cum itaque ſit XP. SN :: XP. RM; erit SN = RM.

XIII. 2. In ſecundo caſu; ſit cujuſvis incidentis AN refractus KNα; & fiat YBq. KBq :: Rq. Rq — Iq; & connectatur YN; erit ABq. YNq :: Rq — Iq. Iq.

Nam quia KBq = KNq — BNq = KNq — YNq + YBq; erit (hypotheſin perſequendo) YBq. KNq + YBq — YNq :: Rq. Rq — Iq :: ANq. ANq — KNq. & per rationis converſionem YBq. YNq — KNq :: ANq. KNq. (eſt autem YBq = YNq — BNq = YNq — ANq + ABq, ergo YNq — ANq + ABq. YNq — KNq :: ANq. KNq (hoc eſt, antecedentes & conſequentes adjungendo) :: YNq + ABq. YNq. quare dividendo ANq — KNq. KNq :: ABq. YNq hoc eſt Rq — Iq. Iq :: ABq. YNq: Q. E. D.

Fig. 41.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rurſus, ſi duo refracti Mα, Nα ſecent axem punctis I, K; ipſos autem ſe decuſſent puncto X; & fiat YP. XP :: R. $\surd$ Rq — Iq. & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS = MR.

Nam SB. KB :: YP. XP :: R. $\surd$ Rq — Iq. quare AB. SN :: $\surd$ Rq — Iq. I. item RB. IB :: YP. XP :: R. $\surd$ Rq — Iq. quare AB. RM :: $\surd$ Rq — Iq. I. ergo AB. SN :: AB. RM. quare SN = RM.

Fig. 42.

2. Hinc SB. RB :: KB. IB.

XV. Porrò, notandum eſt quò radii ab A manantes axi viciniores ſunt eò refractos ipſorum ſpiſſiùs incedere; ſeu minora fore concurſuum interſtitia; ut nempe ſi in refringente EF ſumantur æqualia intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti Mα, Nα, Oα cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

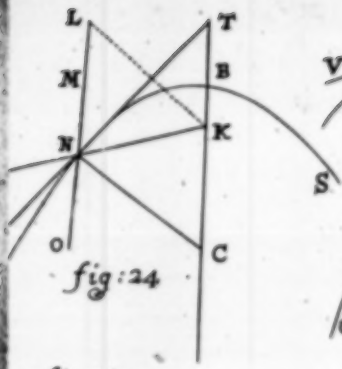


fig: 24

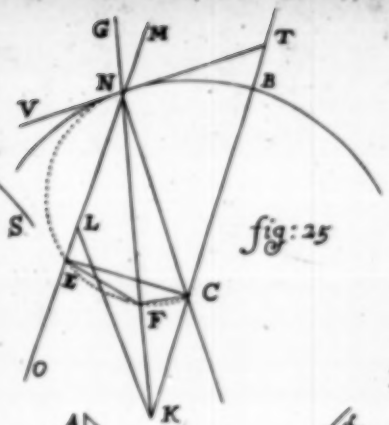


fig: 25

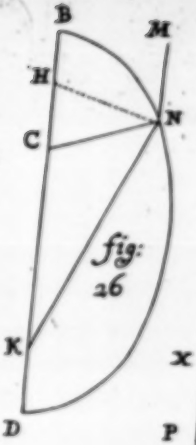


fig: 26

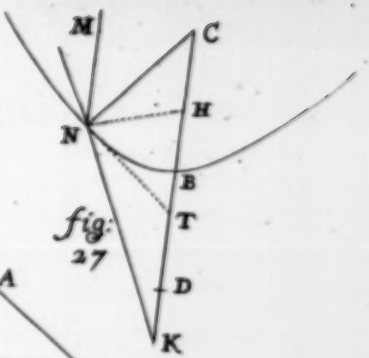


fig: 27

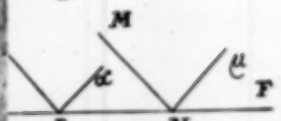


fig: 28

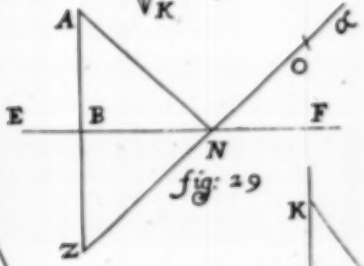


fig: 29

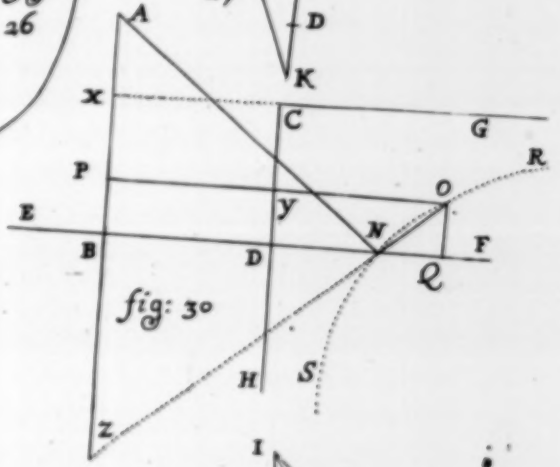


fig: 30

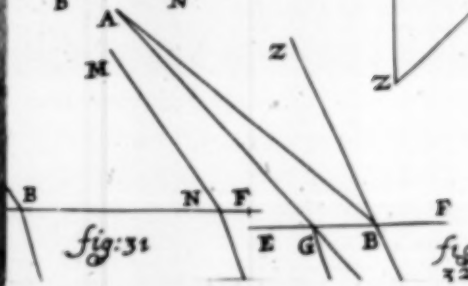


fig: 31

fig: 32

fig: 33

fig: 34

intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti Mα, Nα, Oα cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

tervallum I K minus ipſo K L ; ſeu generalius efferendo, libere ſumptis ipſis M N, N O ; erit I K. K L ⊐ M N. N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate conſtabit. Fig. 43.

XVI. In primo caſu ; ſit (ut antehac) Z B. A B :: I. R ; ſuperque diametro Z B conſtituatur ſemicirculus ; cui à puncto B adaptetur B D = B A ; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y ; tum ad ſemiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) deſcribatur Hyperbole H Z G ; in hac autem ſumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N ; erit K M incidentis A N refractus. Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura eſt K B q − Z B q. B N q :: B Z q. B Y q :: Z D q. B D q (hoc eſt) :: Z B q − A B q. A B q. quare componendo K B q − Z B q + B N q. B N q :: Z B q. A B q hoc eſt K N q − Z B q. B N q :: Z B q. A B q. permutandóque K N q − Z B q. Z B q :: B N q. A B q rurſuſque componendo K N q. Z B q :: A N q. A B q. denuóque permutando K N q. A N q :: Z B q. A B q :: I q. R q. quare K N. A N :: I. R. ergo K N ipſius A N refractus erit : Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concurſus (puta I, K, L) à ſe diſtant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T ; vel ipſarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu paſſim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujuſmodi curvas oſtenſum eſt) in majori ratione creſcunt, quam ipſæ B M, B N, B O ; nempe Z L. Z K ⊏ L T. K S. & Z K. Z I ⊏ K S. I R. quare ſatis liquet propoſitum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ ſunt ; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur ; utcunque circa ipſum præcipuè conſtipantur.

XVIII. Haud abſimiliter, in ſecundo caſu, ſuper ipſa A B deſcribatur ſemicirculus ; & huic accommodetur B D = B Z ; & connexa protractáque A D refringenti occurrat ad Y ; tum centro B ſemiaxibus B Z, B Y deſcribatur ellipſis H Z G ; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela ; connectantur denique rectæ A N, K N ; erit K N incidentis A N refractus. Etenim ex ellipſis natura eſt K S q. Z B q − S N q :: B Y q. B Z q :: B Y q. B D q :: B A q. A D q :: B A q. B A q − B Z q. & per converſam Fig. 45.

verſam rationem KSq. KSq — ZBq + SNq :: BAq. BZq. hoc eſt KSq. KNq — ZBq :: BAq. ZBq. quare permutando erit KSq. BAq :: KNq — ZBq. ZBq. & compoſitè KSq + BAq. BAq :: KNq. ZBq. hoc eſt ANq. BAq :: KNq. ZBq. quare rurſus permutando eſt ANq. KNq :: BAq. ZBq :: Rq. Jq. itaque AN. KN :: R. I. unde patet KN ipſius AN refractum fore: Q. E. D.

XIX. Exhinc, ut in priore caſu, patet quòd diſtantiæ (ZI, IK, KL) concurſuum æquantur differentiis ipſarum ZB, RM, SN, TO ordinatarum ad ellipſim. Et quod ZI, ZK ⊐ IR. KS. &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipſis Z admodum exiguæ ſunt, adeóque propinquiorum axi rádiorum refracti circa Z denſè congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX Ex his tandem univerſis colligitur quòd puncti radiantis A imago (reſpectu ſcilicet oculi centrum O habentis uſpiam in axe AB conſtitutum) circa punctum Z conſiſtet. Sit enim D♪ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano EAFO) & per hujus extrema tranſeant radiorum AM, Aμ refracti IMD, Iμ♪; ſanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipſius AN, vel A♪) refractus oculum ingredi poterit, quin univerſi tales aliorſum digredientur, adeóque nec illi quicquam adviſum attinebunt, eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cùm viſus a ſolis afficiatur radiis intra ſpatium ZI axem interſecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra ſpatium ZI neceſſariò verſabitur imago; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectiùs incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent; cùm & ii (uti mox oſtendimus) ſpiſſiores ſint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem faciliùs ab oculo rurſus in idem punctum recolligantur (id quod poſthac aliquatenus oſtendemus, & interim ex eo fit veriſimile, quòd res per exiguum foramen ſpectatæ, radiis ſcilicet obliquioribus excluſis, longè diſtinctiùs, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita ſe habent, iis perpenſis omninò rationi conſentaneum eſt objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z, hoc eſt ejus imaginem inibi conſiſtere. Addo, quod ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi diſtantiam à refringente, totum ſpacium ZI perquam anguſtum erit, & inſtar puncti merebitur exiſtimari: quæ cuncta propoſitum abunde videntur confirmare.

Fig 46.

XXI. Accedit

XXI. Accedit tamen ei penitiùs aſtruendo etiam experientia, quâ nempe compertum habetur; quòd objectum (velut A) in aquâ ſitum, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ita diſtans videtur (puta ad Z) ut ſit perpetuò A Z quadrans ipſius A B, id quod ratiocinio præcedentibus exquiſitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* ſe habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta conſtructionem præmiſſam ipſius Z B ad A B ratio ſubſeſquitertia; ſeu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat cauſæ cur hoc fretus experimento *If. Voſſ.* Præclariſſimus vir receptam de refractione ſententiam impugnaret, & exploderet; at potius ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expoſiti Phænomeni cauſam adeò perſpicuam, adeo neceſſariam ſuggereret, quinimo perpendicularem ipſam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è ſuperiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione ſaltem refringi, tametſi non ſitu) patebit ad illam attendenti.

XXII. Habetur itaque definitus imaginis ſitus, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præſtemus oculi gratiâ extra ipſum ubicunque ſiti. Sed priùs unum eſt quod opportunè moneamus, anteà prætermiſſum; eâdem ſcilicet operâ quoad radios convergentes ſimul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorſus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente ſcilicet & puncto A deſignatum ſitum retinentibus) media concipiantur tranſpoſita. Nimirum, exempli cauſâ, ſi N K ſit refractus radii B N verſus A tendentis è raro in denſum; erit itidem N H ipſi K N in directum poſitus radii A N B, è raro in denſum (quæ nempe prioribus homogenea ſint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus oſtenſa ſunt, ea convergentibus, adhibito juſto moderamine, pariter adaptari poſſunt; in horum locum divergentes reſpectivè congruos ſubrogando. Quare nedum in hoc caſu, ſed in omnibus qui ſequentur, de radiis ſolummodò divergentibus inſtituemus ſermonem; eò ſubintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ ſanè compendio deſerviens obſervatio, generalibus iſtis ſupra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc ſolam quæ præ manibus, aſt ad omnes æquè, quaſlibet ad ſuperficies, radiorum inflexiones ſe extendit. Fig. 47.

XXIII. Adſimilem & indè conſequentem (cum paralleli à puncto proveniant

provcniant infinitè diſſito) circa radios parallelos obſervatiunculam, compendio ſervientem, etiam hic tempeſtivum fuerit adjungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad poſitionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipſorum concavis partibus incidentium; modò tranſpoſita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes a concavis diſtinguere; ſeu exinde caſus multiplicare. Res è poſthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum; & quam propoſuimus inſtituendam proximè diſquiſitionem ſequenti reſervamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti ſumus, ut radiantis (à ſenſibiliter finita diſtantia) puncti locum apparentem inveſtigemus, illum nempe qui reſultat, è peracta ad planam ſuperficiem refractione; nec non reſpectu viſus extra radiationis axem conſtituti. Quorſum imprimis ſpectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille verſatur; tum ut ſingulare deſignemus in illa recta punctum, circa quod exquiſitè conſiſtit. Utriuſque quæſiti gratiâ conficiendum, (imo penitius excutiendum) venit hujuſmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A_4 in poſitione datam rectam E F radiante, deſignandum eſt incident, qui per alterum tranſeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B exiſtat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ità facilè conficietur. In primo caſu (quando ſcilicet I ⊏ R) fiat A B. Y B :: $\sqrt{Iq - Rq}$. I. itemque fiat K B. T :: $\sqrt{Iq - Rq}$. R; tum centro Y intervallo T deſcriptus circulus ipſam E F ſecet in N; connectantunrque A N, K N; erit K N ∝ ipſius A N refractus.

Itidem in ſecundo caſu (cùm I ⊐ R) fiat K B. Y B :: $\sqrt{Rq.} - Iq$. R. A B. T :: $\sqrt{Rq} - Iq$. I. centroque Y intervallo T deſcribatur circulus ipſi E F occurrens in N; eritque rurſus K N ∝ ipſius A N

A N refractus. Hæc autem è supra positis Theorematis abunde constant. 10 & 13 Lib. 4.

IV. Verum extra casum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema solidum est, pluresque duabus solutiones admittit; id quod facilè perspicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo casu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in secundo) quo posito liquet è præcedentibus obtingere posse nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X transire quod cùm subinde, dico, contingere possit, indè certò consequetur *Problema* solidum esse. Fig. 50.

V. Pro cujus solutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præsertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ sibimet appropriatam habeat, cujus descriptione quàm expeditè construatur; & quidem ità, ut simul indolem suam prodat; possibilitatem, inquam, & impossibilitatem suam; determinationes, & limitationes necessarias; casuum & solutionum varietatem apertè monstret, & velut ob oculos repræsentet. In cujus qualis qualis observationis specimen (alia quædam postmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujusce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè describendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S. A R :: I. R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus stantibus per A quotcunque transeant rectæ secantes ipsam S U punctis H; & centro X, intervallis ipsis A H exæquantibus, describantur circuli secantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ lineæ cum ipsis H A conveniant in N. Per ejusmodi quæcunque puncta transibit proposito nostro deserviens linea (A N N) quam suscepimus describendam; cujusce nimirum cum refringente F F intersectiones ipsissima sunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt, subinde tantùm una, cùm E F sic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras saltem una erit; quæ satis attendenti manifesta futura subnoto tantum. Fig. 52.

tùm & levi pede prætereo; quoniam aliunde mox apparitura) ſit, inquam, ejuſmodi quælibet interſectio N; dico fore XN, ipſius AN refractum. Etenim eſt I.R :: AH.AT. hoc eſt (quoniam AH, KX ſunt ex conſtructione pares) I.R :: KX.AT :: NK.NA. unde manifeſtum, è præmonſtratis, eſt propoſitum. fig. 51.

VII. Veruntamen hujuſmodi conſtructiones *Geometrarum* uſus aut non libenter admittit, aut alias ſaltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas; itaque conſuetudini morem gerentes rem aliter concipiemus; huc utique faciens ſequens *Problema Lemmaticum* præmittentes: Dato angulo recto XPF; punctóque quovis Y; per hoc rectam ducere dati anguli cruribus occurrentem, ſic ut ab iis interceptа ſit a qualis datæ rectæ T. || Expeditiſſimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y deſcriptæ; ſed enim quoniam & iſte modus haud ita Geometricus cenſetur; adhuc iiſdem Geometris obſequentes ità propoſitum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis; & *Aſymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y tranſiens (ſi quidem punctum Y exiſtat extra angulum datum, aut iſtius oppoſita (ſc. punctum Y ſit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante deſcriptus circulus *Hyperbolam* inteerſecet in K, & à K demittatur KL ad BP perpendicularis; accipiatur autem BN = PL; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum; vel eſſe NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbolæ* proprietate eſt PL × LK = PB × BY. adeóque cùm ſit ex conſtructione BN = PL; erit BN × LK :: PB × BY. adeóque BN. BY :: PB. LK. eſt autem BN. BY :: DY. DG. ergo eſt PB. LK :: DY. DG. quare cùm ſit PB = DY. erit LK = DG. adeóque (pares LH, DP addendo, vel ſubtrahendo) eſt KH = GP. quinetiam eſt YH = LB = PN (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipſi GN: Q.E.F. Fig. 52.

VIII. Notandum eſt autem in caſu, quando punctum Y intra datum angulum XPF exiſtit, quòd circulus ille centro Y deſcriptus ſubinde delignatam hyperbolem binis punctis ſecabit (quod enim pluribus haud quoquam ſecabit univerſim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas oſtendimus) quo caſu patet duas obvenire propoſiti ſolutiones, aliquando rurſus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget; & tum una tantum per Y duci poterit recta, datam T adæquans; illa ſcilicet omnium quæ per Y dato angulo interſeri poſſunt minima. Quod ſi circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorſus *inverſum* erit.

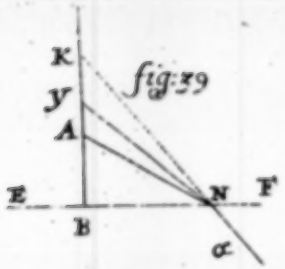


fig: 39

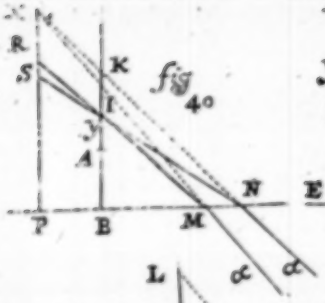


fig: 40

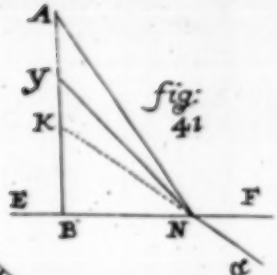


fig: 41

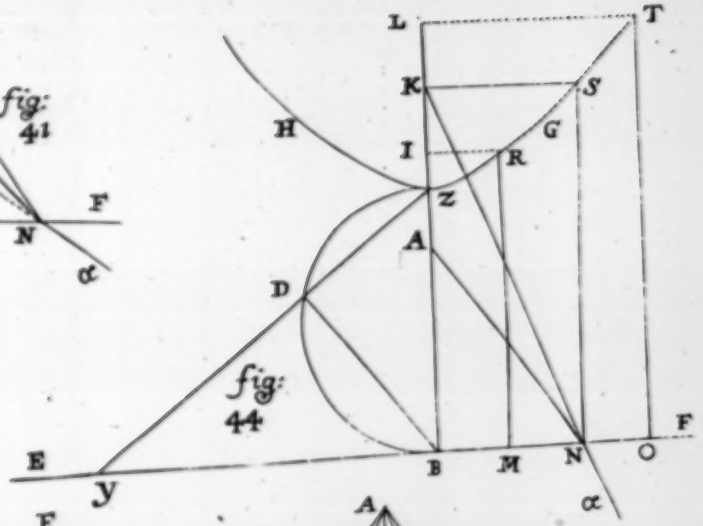


fig: 44

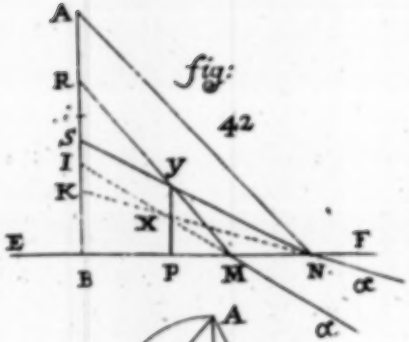


fig: 42

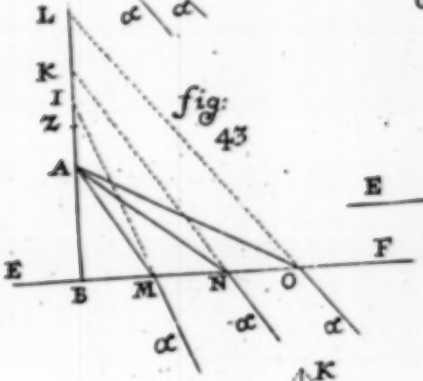


fig: 43

fig: 46

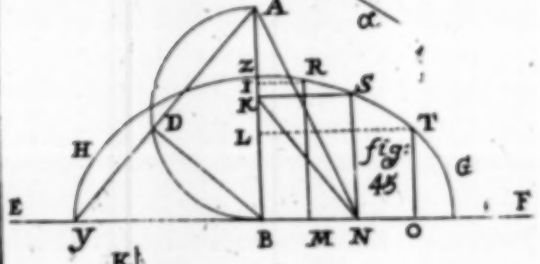


fig: 45

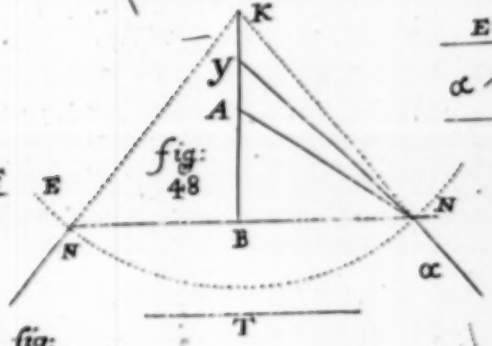


fig: 48

fig: 47

fig: 50

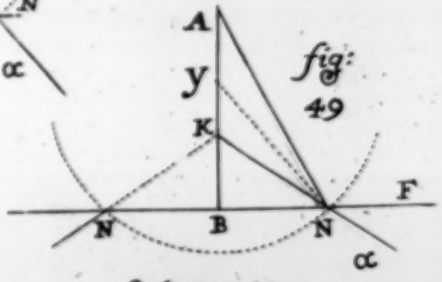


fig: 49

Opt pag 40

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum existat, evidens est tantum uno modo problemati satisfactum iri; quódque per alteram intersectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillum attendenti manifestè constabunt; nihil ut sit opus hic plura verba consumere. verùm ut in horum casuum primo constet (id quod pro sequentibus ex usu erit cognoscere) quando dictus circulus *hyperbolem* contingit, seu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejusdem interseri possit, hoc adnectemus *Theorema.*

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF existente demittantur ad ejusdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ sint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G transibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF subtendere possunt. Fig. 54.

Quòd NYG sit una recta patet, quoniam est YB. BN :: GD. DY (ex constructione nimirum) porrò per Y transeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuòque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR similia fore; quódque propterea est MN. MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ÷÷) est BN. YD :: DGq. YDq. hoc est YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergò est MN. MR :: MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major est GS ipsâ MT; adeóque rectæ OH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH :: LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, est LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. ast ob angulum rectum GNH est GH ⊏ GN. quare magis est LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major ostenderur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam si GN sit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè consequetur fore YB, BN, GD, YD ÷÷. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub, vel $DY = \frac{BNcub}{YBq}$. itaque DY est quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari potest autem, quòd minimæ GN propiores remotioribus

tioribus minores sunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interseri possunt, ad ejus utramque partem singula. nimirum hæc è superiori constructione luculentè patent; pauxillum expende Sodes; & perspicies; operámque meam non desiderabis.

XII. His præstratis ad *Principale construendum Problema* revertimur; & reliqua detexenda. scilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius est designandus, cujus refractus per datum punctum X transibit. || hoc ità conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares AB, XP. tum in primo casu fiat AB. YB :: √Iq — Rq. I. neque non fiat XP. T :: √Iq — Rq. R. & per punctum Y transadigatur recta NG subtendens angulum APF, & ipsam T exæquans; & connectantur AN, XN. dico factum; seu rectam XV incidentis AN refractum esse. || Etenim est XP. KB :: NP. NB :: NG. NY. permutandoque XP. NG :: KB. NY. hoc est XP. NG (vel √Iq — Rq. R) :: KB. YN. inque per theoremata præmissum liquet KN ipsius AN refractum esse: Q. E. F. Fig. 55, 56.

Haud absimiliter in secundo casu, fiat XP. YP :: √Rq — Iq. R; itémque AB. T :: √Rq — Iq. I; angulóque ABF per Y transiens, ipsamque T adæquans inseratur recta NG; connectantúrque AN, XN; factum erit. || Nam ipsam XP protractam secet AN in S. èstque SP. YN :: AB. GN :: AB. T :: √Rq — Iq. I. unde consequitur è præmonstratis fore XN ipsius SN refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc, & præmissa respiciendo facis dilucescit non ultra duos ad unas perpendicularis AB partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut supra declaratum) per punctum Y (quod universis hujusmodi constructionibus commune, vel invariatum perpersistit, in primo casu quoad omnes ab A incidentes; in secundo quoad omnes per X transeuntes refractos) plures duabus sibi pares duabus sibi pares rectæ angulo recto XPF, vel ABF interseri nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipsum X transibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago versatur; iste nimirum refractus qui per oculi centrum transit, modo jam expósito ducendus; ipsum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè consistit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in casu primo, punctum Y conditione prædictum jam

jam aliquoties insinuatâ; scilicet ut sit AB.YB::√Iq—Rq.I; & designetur quilibet refractus KN; tum continuetur ratio YB ad BN, ut sit ad has proportione quarta BP; & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela; refracto KN occurrens in Z; dico nullum alium refractum per Z transire. Nam si fieri potest transeat alius ZR; & per Y traducantur rectæ NYG, RYS; è præmonstratis apparet quòd sit RS*=NG. item è prædictis manifestum est quòd RS*⊏NG. quæ repugnant. Fig. 57, 58.

* 12. Lect. 4.
* 9 hujus Lect.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus KN; & fiat KB.GB::√Rq—Iq.R; tum adnexâ GN, ad ipsas NG, GB sumatur tertia proportionalis V; & fiat NG.V::BN.NP; & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decussans in Z; dico nullum alium refractum per ipsum Z meare. Nam, si neges, transeat alius ZR; & per Y trajiciatur RYS; & quoniam ZP.YP::KB.GB::√Rq—Iq.R. ex *antedictis apparet fore RS=NG. quinetiam ob NGq.GBq::NG.V::BN.NP. erit dividendo NBq.GBq::BP.NP. hoc est NPq.PYq::BP.NP; inde facile deducitur esse BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN; consequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adversatur ostensis. itaque potiùs per Z nullus alius transit refractus: Q.E.D.

* 14. Lect. 4.

XVI. Præterea, si refractum NKZ intersecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) intersectio X solitario puncto Z citerior erit (seu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ; ipsam NG secans in γ; & (in primo casu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò MH=Nγ. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interseri possunt inter puncta M, N cadet (uti nuper admonitum, & adstructum). puta ad φ. ergò quum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad Bφ, erit PB⊏QB; adeóque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q.E.D. Fig. 59, 60.

In secundo casu, per γ trajiciatur recta MγH. ergò cùm sit QX.Qγ::PZ.PY::√Rq—Iq.R. erit HM=GN. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet; puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad Qφ; & est γQ.Qφ⊏(γQ.QN.)::YP.PN. &

simplicibus triplicatas substituendo rationes, est $\gamma Q . QB \sqsubset YP . PB$. & his æquales rationes adjungendo est $QN . \gamma Q + \gamma Q . QB \sqsubset PN . YP + YP . PB$; hoc est $QN . QB \sqsubset PN . PB$. componendóque $BN . QB \sqsubset BN . PB$. ergo $QB \sqsupset PB$. unde rursus liquet rectam XQ ipsis AB; ZP interjacere: Q. E. D.

XVII. Consimili prorsus argumentatione constabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipsam KN intersecare.

XVIII. Quinimò rursus exertiùs apparet non nisi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipso KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præsertim illos, qui ad partes F (obliquius) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, sibi pares NS, ST; & sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipsam NKZ secent in Z, X, & V. patet (è mox ostensis) omnium spatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX; nec non omnes ipsi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR se habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel sunt in ipsarum BN, BS, BT *ratione triplicata*: nam BP . YB :: BN cub . BY cub. & YB . BQ :: YB cub. BS cub. adeóque ex æquo BP . BQ :: BN cub . BS cub. & consimili ratione BP . BR :: BN cub . BT cub.) undè facilè monstrabitur esse PQ multo minorem quàm QR; xel ZX quàm XV (verbis parco multis in re satis manifesta). quare dicti refracti circa punctum Z spissiùs ipsum NK decussabunt.

XX. Ex his demùm conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK uspiam constituto, puncti A imaginem ad ipsum conditione præditum toties insinuatâ punctum Z consistere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter*; *axi Optico* KN perpendicularis; & per ejus extrema C, D transeant refracti IM LR ipsi KN occurrentes punctis X, V. ex ostensis patet omnium intra spatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum intersecare; neque non omnes ad spatium

ſpatium N R pertinentes intra Z V eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (ſeu nullum citra X, vel ultra V cum ipſo K N concurrentem) oculum ingredi poſſe. quare ſaltem imago conſiſtet intra terminos V X; ſiquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad viſionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. cæterum quoniam ab V X procedentium (apparenter, inquam, procedentium) reciſſimi, vel axi propiores velut ab ipſo Z procedere videntur (ſeu à loco qui circa ipſum) ipſique proinde validius afficiunt oculum, & ab eo facilius adunari, recolligique poſſunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi ſaltem qui ad partes N R,) quia denique propter anguſtiam pupillæ ſpatium V X haud ita magnum exiſtit; cum, inquam, hæc ita ſe habeant, omnino rationi conſentaneum eſt, dictam imaginem circa punctum Z verſari; nec alias arbitror excogitari poſſe verisimiles cauſas, quæ ſitum ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & poſt eum pleraque cohors *Opticorum* ipſam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem A B decuſſat, conſtituit; verùm haud ullam rei natura cauſam ſuggerit, cur inibi ſtatuatur. unicus enim (niſi ſaltem pupilla perpendicularem ipſam A B comprehendat, oculuſque valdè ſit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo viſui minimè ſuffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra K X ipſi K adjacentium eſt ratio; nullus ſiquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque ſubeſt cauſæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens N H æqualem ipſi N A puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulſus quia taliter in reflectione ſe rem habere perſpexit; cui ſimilis cauſa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Servinum* (quanquam ipſos in diverſum euntes) horúmque ſequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout uſu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indiſtinctéque perceptas mortalibus imponere; ſed utcunque quod dixi magis iſta ſententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo caſu refractorum concurſus fit infra angulum A B F: nullus extra illum in ſecundo; proindèque fortius hanc quæ objecimus, quàm priorem *Alhazeni* percellunt ſententiam. addo quòd ſimul utraque, ſed præſertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicique ratiocinio; pariter enim ſe res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quòd manifeſtè, longeque ſecus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum eſt. quin hanc abunde ſubvertit ac peſſum dat quod ſupra propoſuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipſo perpendicu-

Fig. 62.

D. Hobbium.

lari.

lari AB constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) ast pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citerius adspectatur, aut ulterius. Sed effatum hoc nostrum (eique quoad reliquos in Catoptricis, Dioptricisque casus similes consona) tametsi novitium, & nullâ quod sciam hactenus auctoritate fultum, cùm forsan expositum dilucidius, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locóque speciatim evenerit dissertare. Mihi saltem videtur hæc Scientia quoad hanc partem suam, certè palmariam (uti reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodùm vitiosa; nec alio ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interseremus. Aquæ Superficiei RS (stagnanti, & immotæ desuper immineat objectum HG; ejus autem punctum G radat perpendiculum EF (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari GB velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantiâ) citra lineam Bγ aspicitur (velut ad φ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciúmque doctrinam liquidò destruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, ast aliam alii) Chimæram inani sunt operâ prosequuti; de quâ *Cartesius* ipse percontanti *Mersenno* sic
Tom. II. Epist. 73. respondit: "Non potest facilè determinari qualem figuram linea visa "in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis ima- "ginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò per- "suaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum sortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, ni fallor, hinc & promptè possit assignari. verùm hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

Lect. VI.

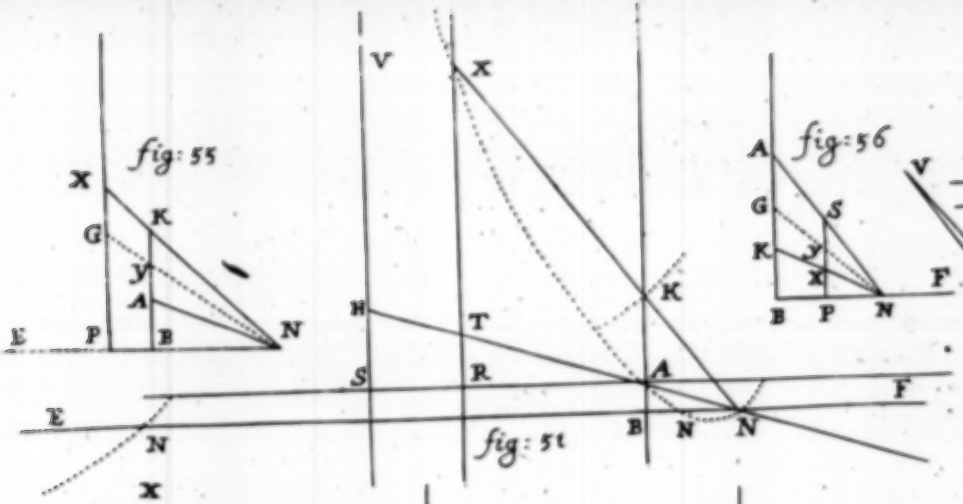


fig: 55
fig: 51

fig: 56

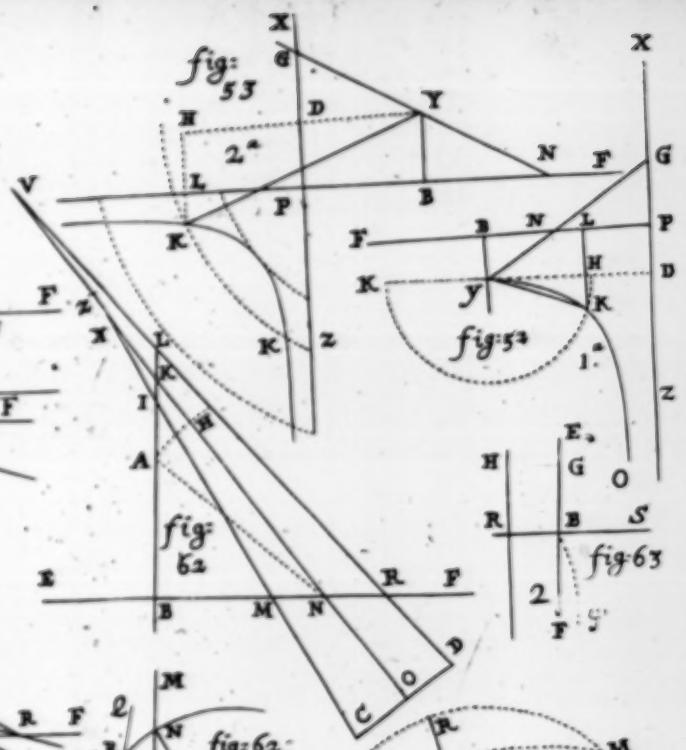


fig: 53
fig: 52
fig: 62

fig: 63

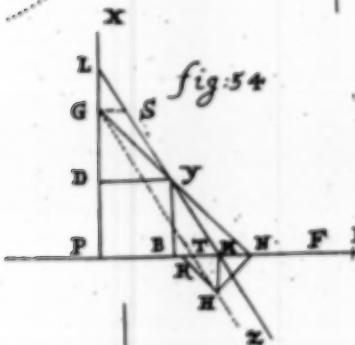


fig: 54

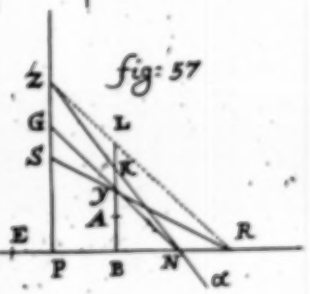


fig: 57

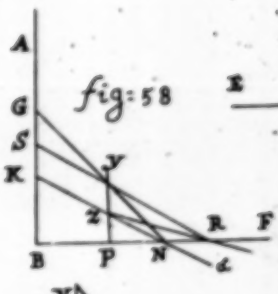


fig: 58

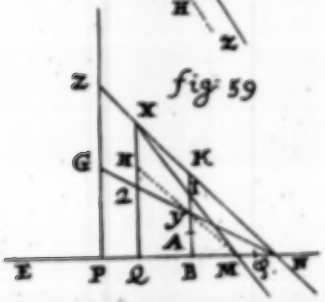


fig: 59

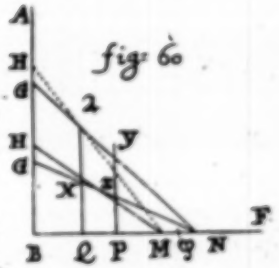


fig: 60

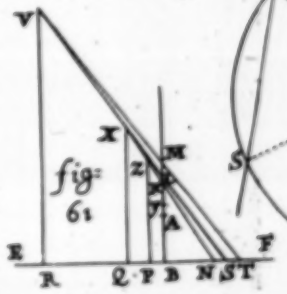


fig: 61

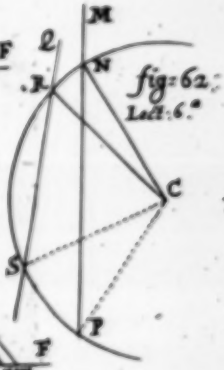


fig: 62
Lett: 6.a

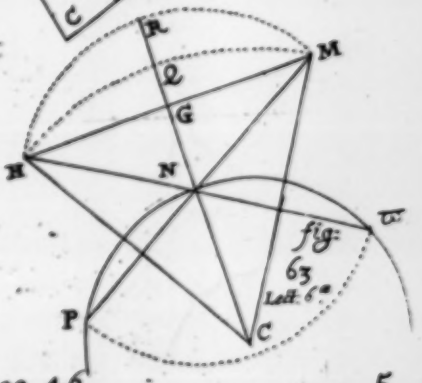


fig: 63
Lett: 6.a

Opt pag 46

Lect. VI.

I. Absolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam superficiem inflexis (observatu quæ videbantur non indigna, cumque principiis nostris cohærentia; quæ denuò viam sternebant, aut methodum aperiebant sequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excussâ re, tam exilem illam & abstractam deprehendo, satius ut existimem actutùm ad particularia descendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratissimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è vestigio. pro qua tamen, ob causas pridem assignatas, circulos subrogabo per oculi Sphæræque centra, perque singula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primo, *Dioptrica* postmodum exequemur. Ad illa.

II. Præsternemus autem λημμάτων unum vel alterum; hoc imprimis: Incidentium circulo radiorum obliquior est, qui magis à centro distat, vel qui minorem arcum (subsemicircularem) subtendit. scilicet obliquius incidit recta QRS, quàm recta MNP. Nam à centro C ducantur CN, CP, & CR, CS. & quoniam angulus RCS angulo NCP (hypothesi nimirum insistendo) minor est; patet reliquos CRS, CSR reliquos CN, P, CPN (cùm junctim, tum singulum singulo) majores esse. Cùm itaque Semidiametri CR, CN, circumferentiæ perpendiculares sint; omninò liquet propositum. Fig. 62.

III. *Dato radio* MN *ad circulum incidenti congruum reflexum reperire.* Fig. 63.

Variis modis hoc facilè peragitur, quorum nunc unum adhibere, tunc alium ex usu sit. nos unum aut alterum ex expeditioribus attingemus. i. Incidens MN protrahatur ut circulum denuò secet in P.; & sumatur arcus Nσ = NP; erit connexa σNH ipsius MNP reflexus. nam à centro C connexâ CN, manifestum est angulum CNσ,

CN ϖ, angulo CNP æquari . z 2. Accepto quovis in NM puncto (puta M) centro C per M describatur circulus MQH; item centro N per M describatur circulus MRH, qui priorem MQH secet in H; erit HN ϖ reflexus ipsius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex constructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protensâ CNR, à quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac producta sumatur GH = GM; erit conjuncta HN ϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi sufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

Fig. 63.

IV. Nocetur si fuerit HNP reflexus ipsius MNP fore N ϖ = NP.

V. Dispiciamus jam primò quid ex hujusmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quo ad sensum distantiâ radianti, seu parallelos projicienti radios. quorsum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in sequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejusmodi recta nominetur axis; hic *Speculi*, posteà *Diaphani*) bisecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z transeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protensa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque casu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iste qui in illo productus erit) connexáque CN ipsam ZY intersecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipsius MN reflexus (vel reflexi productus) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éstque CZ.CK :: (CZ.CV ::) CQ. CN. quapropter antecedentes duplicando CN.CK :: PN.CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP similia sunt; adeoque KN = KC. igitur è suprà generatim ostensis patet fore KN, ipsius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujusmodi quotcunque reflexos quàm expeditissime designandi; quin & ipsorum erga se rationes ac respectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucescunt; corollariis nempe subjectis comprehensa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB bisecans, esse metam

metam infra quam nullus reflexus axem ſecat (vel perpendicularis iqſius reflexum BZ ad Z terminari). quia ſemper Cv ⊏ CZ, adeóque CK ⊏ CZ.

VIII. 2. Patet eſſe KN = KC.
3. Patet fore PN (2CQ), CN, CK ÷÷.

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet ſecantem CE diſtantiæ CK duplam eſſe; & EN = 2KZ.

X. 5. Manifeſtum eſt incidentis ad F (hoc eſt ad diſtantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B tranſire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra ſpacium BZ decuſſare; ſed omnes *extra* BF reflexos ultra B cum eo convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perſpicuum eſt duorum hujuſmodi quorumvis ad eaſdem axis partes incidentium (ut ipſorum MNP, QRS) reflexos (ut GNK, HRL,) productos ſe prius decuſſare, quàm axem. Nam, ductis CR, CN, eſt Cr ⊏ Cv, adeóque CL ⊏ CK. unde neceſſariò rectæ NK, RL, ſe decuſſabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipſi convexis partibus incidentium reflexi, NG, RH, antrorſum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde ſpeculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum GXR (vel KXL) à duobus reflexis comprehenſum æquare duplum angulum NCR (hoc eſt duplum exceſſum angulorum incidentiæ). Nam ang. KXL = ang. ALR — ang. AKN = 2 ang. ACR — 2 ang. ACN = 2 ang. NCR.

XIV. Pro Sequentibus hujuſmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam ABC recta AD biſecet angulum BAC; dico fore AB + AC ⊏ 2AD. Fig. 66.

In *Iſoſcele* res clara eſt; in alio proinde ſit AC ⊏ AB; centróque A per B ducatur circulus BXY ſecans ipſam. AD in X, & AC in Y. Subtenſa BX ducatur, ipſamque AC ſecet in V; fiátque VT ad AD parallela. denuò ſubtenſa XY connectatur. Et quoniam ang. XVC major eſt angulo XYV, vel angulo BXD, vel ipſo

BVT, patet rectam VT angulum XVC secare. item ob angulum XYV obtusum, est XV ⊏ XY = BX. ergo BV ⊏ 2 BX; & VT ⊏ 2 XD. Verùm ang. VTC (major ipso TVB, vel ipso DXB) est obtusus; adeóque VC ⊏ VT; itaque magis YC ⊏ 2 XD. ergò AB + AY + YC ⊏ 2 AX + 2 XD. hoc est AB + AC ⊏ 2 AD: Q.E.D.

XV. Quò paralleli radii rectiùs (vel axi propinquiùs) incidunt, eò reflexorum concursus ad axem sibi viciniores sunt.

Fig. 67. Nempe sumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit ML ⊏ LK. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis ν, ρ, ξ. Est itaque (juxta *Lemma* præcedens) Cξ + Cν ⊏ 2 Cρ; hoc est, CM + CK ⊏ 2 CL. quare CM — CL ⊏ CL — CK; hoc est ML ⊏ LK: Q.E.D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujusmodi reflectione magis magisque constipari, maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipsius quasi reflexus terminatur. unde potissima constat ratio, quare concavis à speculis ad solem expositis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condensatior, inque spacium arctius quasi compressa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

XVII. Quinetiam ex his consectatur, longinqui puncti imaginem

Fig. 68. oculo in axe constituta circa punctum Z consistere. Sit, inquam, BCO axis Opticus; oculique dianeter DΔ (in plana nempe circuli propositi sita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, VKΔ (ad incidentes MNP, μρσ pertinentes). jam abunde manifestum est imaginem conspicuum intra KZ spatium versari. Nam alterius cujusvis hinc, vel indè cadentis reflexus (seu ipsius RS, vel ρσ) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad visionem ipsam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis, qui scilicet oculum ingredientes suo quisque modo visum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectiùs incidunt oculo, magisque pollent idcircò; nec non iidem propterea faciliùs ad unum in oculo punctum recolliguntur, præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi consonum est isthic præsertim imaginem consistere, siquidem velut ab eo plures, ac efficaciſſimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pupillæ

pillæ latitudinem, ipſum ſpatium K Z non ità magnum eſſe, quin inſtar *Puncti* poſſit cenſeri. Quibus ex penſis luculenter conſtare videtur propoſitum.

XVIII. Subdo tantùm, ſi oculus uſquam intra ſpacium Z B ſtatuatur, viſionem indè confuſam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (ſeu rectiſſimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis noviſſimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto diſtat intervallo, quanto punctum radians ab eodem ſemovetur; ità quidem ut Sol ex hujuſmodi reflectione conſpicuus ad tantam, quantam directè ſpectatus, diſtantiam (eorum inſiſtendo ſententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim ſi Soli exponatur *Speculum* R B r (concavum, aut convexum) ſic ut ei Sol quaſi perpendiculariter immineat, oculúſque prope axem B C conſtituatur uſpiam; ferè circa punctum Z, arbitrante ſenſu, luculenta Solis imago ſeſe præbebit oculo conſpiciendam; id quod juxta ratiocinium noſtrum neceſſariò debuit evenire. verùm hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuſcunque ratio veriſimilis conſtabit) ubique ſe objiciet refutandum. hic itaque pluribus parco; pergóque verſùs oculum extra radiationis axem poſitum; poſtquam unicam hanc præcedentibus adnexam obſervationem ſubjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum viſibile clariùs atque diſtinctiùs repræſentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe ſubtenſam N V inſiſtant imparium circulorum ſegmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; conſtat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c exiſtere. biſecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; hiſque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; denuò radii P N axi paralleli ſit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipſam verò N b v ſit ejuſdem reflexus N k; liquidiſſimè jam patet quòd ſit N e ⊏ N E; hoc eſt quòd dupla z k major ſit duplâ Z K; adeóque ſimpla z k major ſimplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio ſtrictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de cauſa rem objectam illuſtrius atque Fig. 69.

distinctius exhibet obtuenti. quod erat propositum ostendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe situm sufficerit attigisse. Superest ut idem oculi gratiâ secùs constituti pertentemus. id operis sequenti deputamus.

LECT. VII.

I. IN nunc agimus, ut ab infinito quoad sensum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi respectu præter axem siti, locum exquiramus. quocirca primùm ipsa recta linea determinanda venit, in qua locus iste versatur; tum ipsissimum præcisè punctum est designandum. In primi verò propositi gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB positione data; designandus est huic parallelus radius, cujus reflexus per datum transeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipsa CB existat, facilimè peragitur negotium. nam si centro K, intervallo KC describatur circulus, ipsi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB parallelo; prout ex antedictis abunde perspicuum est.

Fig. 71. IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipsa reflectentis circumferentia versetur; arcûs trisectione statim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipsa uno modo problemati satisfacit) & interceptus arcus XH secetur punctis N, P, ut sint arcus XN, NP, PH æquales inter se; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipsi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipsius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindeque NP ipsi XH, hoc est ipsi BC, parallela est. itaque factum.

V. Verùm

V. Verùm extra caſus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀνεξιχνίαστος) *Problema* magìs ſolidum eſt; in ſummo quippe gradu tale; quatuórque ſubinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi poteſt (ut alia pleraque, ſicuti pridem admonitum nobis) ſibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditiſſimè per puncta deſcribendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectatúrque recta XC; & ſuper hanc ceu diametrum deſcribatur circulus XICI. tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC ſecantes punctis I, rectámque GF punctis H; & adſumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ità ſcilicet ut puncta I rectas NH perpetuò biſecent) perque puncta quotvis ejuſmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quà certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis noſtri conſtructioni deſervit, ejúſque liquidò naturam patefacit; ſiquidem ejuſce cum dati circuli interſectionis N (illæ verò ſubinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim interſectionibus adnumero) nonnunquam Solummodò duæ; prout datus circulus magnitudine prædictus eſt aliâ ac aliâ; quæ ſtrictim adnoto tantùm, animum advertenti manifeſtè conſtitura) poſſibiles quaſque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipſo X ad ejuſmodi quamvis interſectionem N recta XN; & per N tranſeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC ſecet in I, rectámque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è deſcriptæ lineæ naturâ ſeu conſtructione eſt IH = IN; angulúſque CIX, in Semicirculo, rectus eſt; erit XN = XH; vel ang. XNI = ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par eſt. quapropter anguli XNI, HNP pares ſunt. adeóque recta NX ipſius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. ſic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam ſuprà) *Geometrarum palato minùs ſapiunt hujuſmodi Problematum inuſitata ſolutiones*; aliter id (ſatis breviter atque perſpicuè) dabimus effectum hoc ſaltem eo faciens Lemmaticum Problema præmittentes. Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus poſitione data diameter GF) & puncto C in ejuſce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id ſic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipſas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inferatur recta RS par ipſi P (id autem quomodò præſtandum, edocuimus ſuprà). tum per C

ducatur;

ducatur CHL ad RS parallela, erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG, & huic perpendicularis ducatur GT, ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeóque fore CT. CG :: SR. SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG. GH :: SF. FG. erit igitur ex æquo CT. GH :: SR. FG. (hoc est) :: FG. Z. verum est CT. FG :: CH. FH :: HG. HL. permutandóque CT. HG :: FG. HL. quare FG. Z :: FG. HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q. E. F.

Plures esse casus possunt, ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (idque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel
Fig. 73, 74. in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit, ut pluribus huc non sit opus.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectisque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quo punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum, nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interseri, subinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità respectivè Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hic data Z, eò minor evadet intercepta RS; & vicissim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inseri possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, & Semicirculum GEF comprehendi possunt. unde *Porismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit, & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satis videtur. jam ad principalis quæsiti resolutionem accedimus; ità jam brevitur propositi.

Fig. 73, 74. VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela, tum ex C projiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL æquetur Semidiametro reflectentis circuli, quæ & illum secet in N;

ductæ

ductæ XN reflexus (puta NP) ipſi BC parallelus erit. Nam connexis XC, XL; quoniam CN = HL; & CX = LX; & anguli XCL, XLC pares ſunt; erit XH = XN. quapropter erit NP ad XH, vel BC parallelus: Q.E.F.

IX. Ex hac conſtructione, cum præmiſſi lemmatis ſolutione collatâ diluceſcet hujuſmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, tranſire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam ſi CN major ſit, quam ut ei par HL rectâ GF, Semicirculóque GEF intercipi poſſit; quod ad axis partes, ad quas ipſum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam ſi CN tanta ſit, ut ei par una tantùm ejuſmodi recta poſſit intercipi, quòd unicus per ipſum X reflexus iter ſuſcipiet. tales, inquam, expoſiti problematis determinationes hanc conſtructionem haud obſcurè ſequuntur; quas certè tu meliùs uno mentis (haud dormitantis) ictu perſpexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro. Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (ſeu rectas) ſatis definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, reſpectu viſûs utcunque poſitione datum centrum habentis, conſiſtit. ad ejus jam præciſiorem locum inveſtigandum accingemur; in iſtarum rectâ quâpiam exiſtentem.

XI. Hoc adnotetur imprimis, quòd ſi duorum ad eaſdem axis partes incidentium parallelorum (NP, RS) reflexi ſint Nσ, Kσ; erit arcus NR, vel PS arcûs $\sigma\sigma$ ſubtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X; & Connectatur recta Rσ. & quoniam, è præmonitis, angulus NXR duplus eſt anguli arcui NR ad centrum inſiſtentis; erit idem angulus NXR anguli NσR quadruplus. quapropter erit ang. NXR — ang. NσR triplus anguli NσR, hoc eſt angulus XRσ anguli NσR triplus. unde quoque triplus erit arcus $\sigma\sigma$ ipſius NR: Q.E.D. Fig. 76.

XII. Iiſdem ſtantibus dico fore RX (obliquioris reflexi partem incidentiæ concurſûſque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi Rσ. Nam, ductis ſubtenſis NR, $\sigma\sigma$; erit 1.3:: arc. NR. $\sigma\sigma$. $\supset$ recta NR. $\sigma\sigma$:: RX. Xσ $\supset$ RX. Xσ (quia ſcilicet eſt Xσ $\subset$ Xσ). igitur eſt Xσ minor triplâ RX; componendóque minor erit Rσ quadruplâ RX: Q.E.D.

XIII. Item

XIII. Item, dico fore NX (rectioris itidem reflexi concursûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius N●. Etenim fiat ang. HR● = ang. N●R; quapropter erit HR = H●; adeóque 2 H● = HR + H●⊏R●⊏N●. item quoniam ang. RHN = 2 ang. HR● = ang. XRH; est XH = XR⊏X●. quum itaque sit H● major semisse totius N●; & XH major semisse residui NH; liquet totam X● majorem esse triplâ XN; seu totam N● majorem esse quadruplâ NX: Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit NZ reflexi N● quadrans, quod nullus alter hujusmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior fuerit, NZ⊐¼N●; sin rectior fuerit, erit NZ⊏¼N● (mirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypothesi.

Fig. 77. XV. Quinetiam ipsi N● propiùs adjacentium occursus puncto Z vicinjores sunt, hinc indè. Secent. inquam, radiorum LM, RS reflexi Lμ, Rσ ipsam N● punctis Y, X; istæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit ZY⊐ZX. Nam connectantur R●, L●; & fiat ang. ●LH = ang. N●L; ducantúrque rectæ RH, RY. estque RH⊏LH = H●; adeóque ang. H●R⊏ang. HR●; & proinde ang. NHR⊐2 ang. H●R. item YR⊏YL = YH; proindéque rursus ang. NYR⊐2 ang. YHR. quare multo minor est ang. NYR quadruplo N●R est autem ang. NXR quadruplus anguli N●R; igitur ang. NXR⊏ang. NYR. ponatur jam, si fieri potest, punctum X ipsis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus NYR interno NXR major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potiùs est ZY⊐ZX: Q. E. D.

Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sese priùs (velut ad ♀) quàm ipsum N● decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (utaliquando tandem destinatum attingamus scopum) è dictis

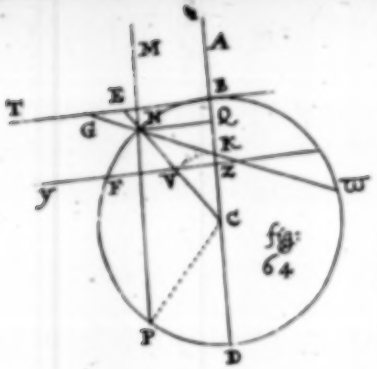


fig: 64

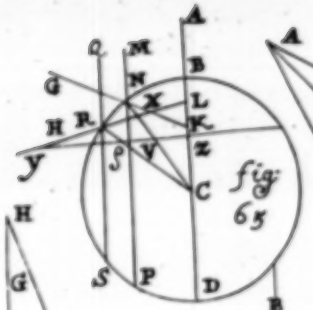


fig: 65

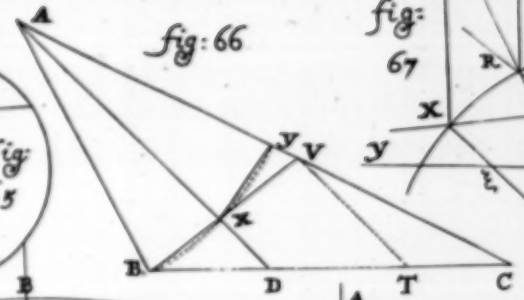


fig: 66

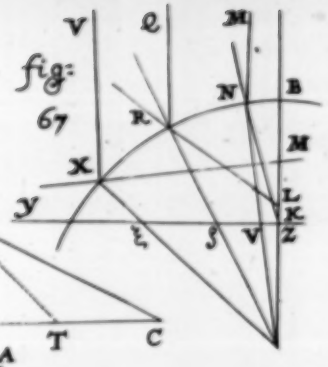


fig: 67

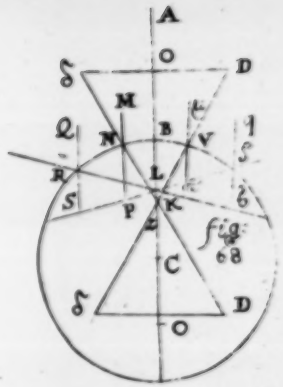


fig: 68

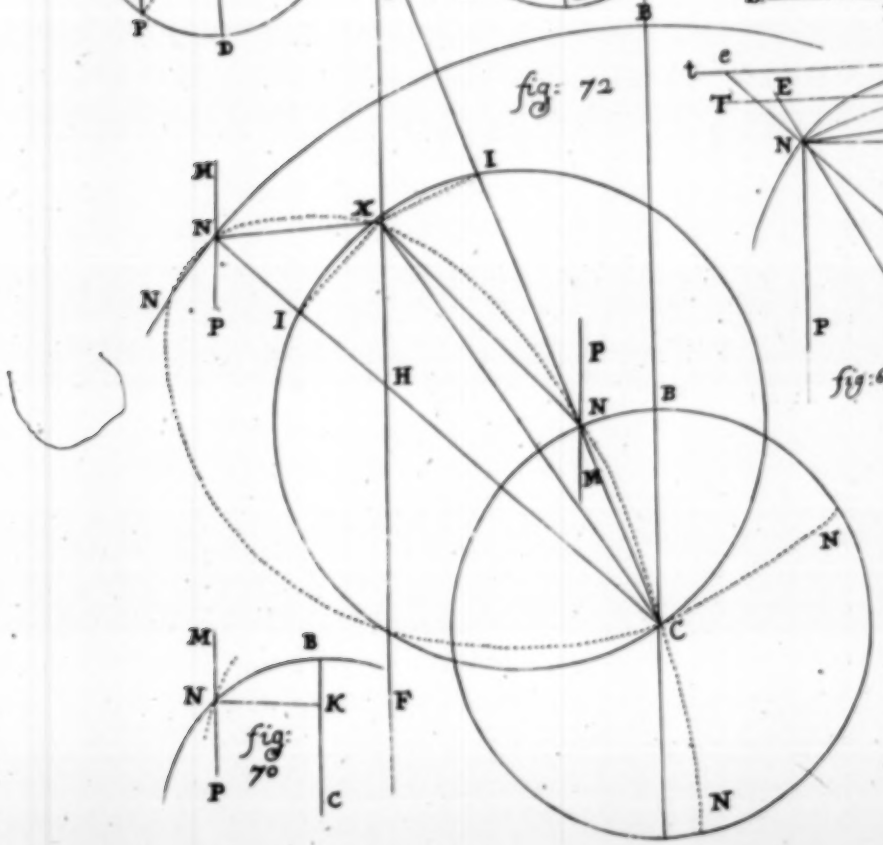


fig: 72

fig: 70

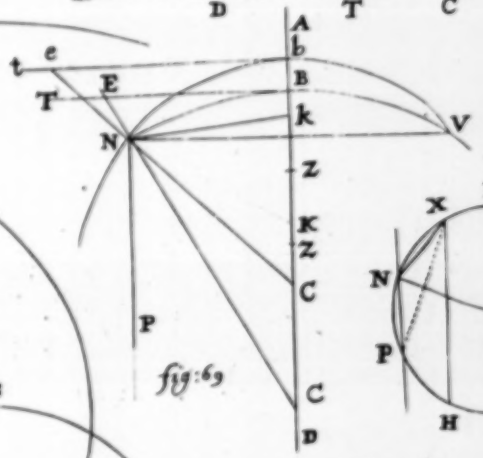


fig: 69

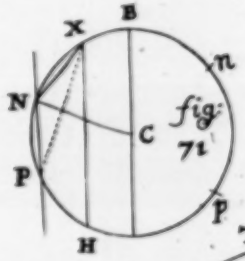


fig: 71

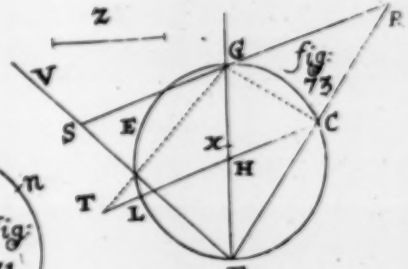


fig: 73

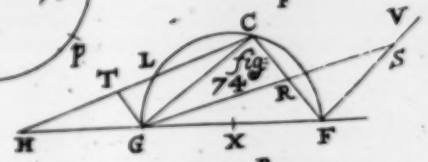


fig: 74

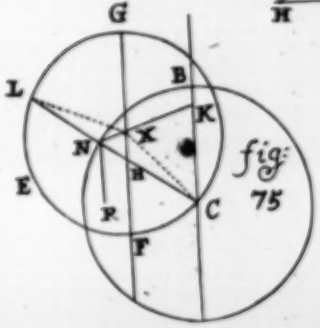


fig: 75

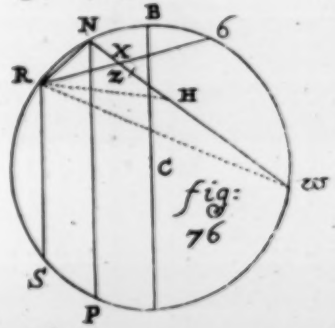


fig: 76

Opt pag 56

è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uſpiam in ipſa N ∞ ponitur, circa punctum Z (ipſam N ∞ prænotato modo quadriſecans) radiantis imago conſpicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per eujuſce terminos tranſeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iſte ſecet ipſum N ∞ in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipſo R S, rectiorum ipſo L M nullus oculum intrabit; uti ſuprà non ſemel argumentati ſumus, intra ſpatium X Y neceſſariò conſiſtet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N ∞ propiùs adjacentes perpendicularius oculum feriunt, idque ſpiſſiùs (ut ex analogia par eſt exiſtimare; nec enim id operoſiùs aggrediar demonſtrare) propter aliquoties expoſitas cauſas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc eſt ad ipſum imago conſiſtet. Accedit quod ob anguſtiam pupillæ ſpatium X Y ſatis modicum exiſtit; ut puncti modum vix excedere videatur. Fig. 78.

XIX. Subdo; ſi ſtatuatur oculi centrum uſpiam in Z N; iſque verſus partes N obvertatur; objectum confuſiùs apparere; quippe cùm reflexi viſum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone viſum conſiſtit.

XX. Hinc à ſpeculo Cavo tantùm una repræſentatur Imago, ſaltem bene diſtincta. Nam in duorum reflexorum N ∞, R σ concurſu X ſtatuatur oculi centrum; & ſit $R\zeta = \frac{1}{2} R\sigma$; unde $R\zeta \supset RX$. itaque ſpectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, verſúſque partes N R obverſo; ſed tum imago Z poſt oculum conſiſtit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, ſerióquè perpenſa vix addubito quin facilè ſibi fidem conciliatura ſint, nihil ut ſit opus adverſantia *ſeu veterum Opticorum decreta, ſeu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perſpicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque diſcordant. Cætera verò ſiqua reſtant ad hoc argumentum ſpectantia ſtudio veſtro commendabimus elicienda; mox ad è ſenſibiliter finita diſtantia radiantis puncti *Symptomata* ſimiliter exploranda animum adjecturi.

Lect. VIII.

I. Quæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeóque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circularem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem intersecant; quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibiliter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præsertimque majoris evidentiæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusiùs imprimis, hunc aliquanto conciſiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, ísque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursurum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC secare; nec non ideò trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore AC. AN :: KC. KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è superiùs generatim ostensis consectatur. adeóque NH = NK. itâque cùm sit AC. AN :: KC. HN. erit etiam AC. AN :: KC. KN.

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse HK. HN :: NP. CN.

V. Porrò, constantibus iisdem, dico fore AC. KC :: ACq — ANq. CNq. Nam est NP. CN + AN. CN = HK. HN + AN. CN = HK × AN. HN × CN = AN. HN

+

+HK.CN. = AC.KC + AK.AC = AK.KC. verùm est NP.CN + AN.CN = NP × AN.CNq. ergò erit AK.KC :: NP × AN . CNq. componendóque AC.KC :: NP × AN + CNq.CNq. cum sit igitur NP × AN = AP × AN — ANq. & AP × AN = ACq — CNq, adeóque NP × AN + CNq = ACq — CNq — ANq + CNq, = ACq — ANq. erit AC.KC :: ACq — ANq.CNq: Quod E.D. Fig. 79, 80.

Coroll AK.KC :: AN × NP.CNq.

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus: Si fiat 2CA.CN :: CN.E. & 2CK.CN :: CN.F; & sumatur CQ = E + F, erit ducta NQ ad CA perpendicularis. vel reciprocè, posito quod sit NQ ad CA perpendicularis, erit CQ = E + F. ‖ Nam (ut hoc posterius ostendamus) quoniam est 2CA.CN :: CN.E. & CN. 2CK :: F.CN. erit ex æquo perturbatè 2CA. 2CK :: F.E. vel CA.CK :: F.E. componendóque CA + CK.CK :: F + E.E. Porrò quoniam est ANq = ACq + CNq — 2AC × CQ, erit 2AC × CQ — CNq = ACq — ANq. itaque (juxta præcedentem) erit 2AC × CQ — CNq.CNQ :: AC.CK. hoc est (ob CNq = 2AC × E) 2AC × CQ — 2AC × E. 2AC × E :: AC.CK. hoc est CQ — E.E :: AC.CK. vel componendo CQ.E :: AC + CK.CK. erat autem AC + CK.CK :: F + E.E. ergò CQ = F + E: Quod E.D.

VII. Ex istis porrò deducetur, si dividatur Semidiameter BC in Z, ut sit AC. AB :: CZ.BZ, punctum Z limes erit citra quem (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit. Cujusvis, inquam, radii AN esto reflexus GN, axi occurrens in K. dico fore CK ⊏ CZ. ‖ Nam ob hypothesin (permutandóque) est AC. CZ :: AB.BZ. igitur (antecedentes, & consequentes copulando) AC.CZ :: AC + AB.CB. quare (posterioris hujusce rationis utrumque terminum in æquales AC — AB, & BC ducendo) erit AC.CZ :: ACq — ABq.CBq. est autem ACq — ABq ⊏ ACq — ANq, adeóque ACq — ABq.CBq. ⊏ ACq — ANq.CBq :: AC.CK (è mox ostensis hoc) quapropter erit AC.CZ ⊏ AC.CK. indéque CK ⊏ CZ: Q.E.D. Fig. 81, 82.

VIII. Aliter hoc idem, ut quibusdam fortassè videbitur, minùs involutè: per N ducatur VT circulum contingens. & quoniam NT

biſecat angulum ANK, erit AN. NK :: AT. TK. ⊐ AB. BK. quare BZ. AB + AN. NK ⊐ BZ. AB + AB. BK (communem adſciſcendo rationem BZ ad AB). eſt autem BZ. AB + AN. NK = CZ. AC + AC. CK = CZ. CK & BZ. AB + AB. BK = BZ. BK. ergo CZ. CK ⊐ BZ. BK. permutandóque CZ. BZ ⊐ CK. BK. quin & componendo CB. BZ ⊐ CB. BK. ideóque BZ ⊏ BK, quare punctum Z centro propinquius eſt, quàm ipſum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc ſi puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A ſit à ſpeculo remotiùs, quàm α) erit CZ ⊐ Cζ. Nam eſt BC. AB ⊐ BC, αB. adeóque compoſitè AC. AB ⊐ αC. αB. hoc eſt CZ. BZ ⊐ Cζ. Bζ. quare componendo BC. BZ ⊐ BC. Bζ. & indè BZ ⊏ Bζ.

IX. Porrò, conſectatur è præmiſſis, quòd ſi duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem interſecent punctis K, L; erit CL, CK :: ACq — ANq. ACq — ARq. || Nam quoniam eſt AC. CK :: ACq — ANq. CBq. itémque CL. AC :: CBq. ACq — ARq. erit ex æquo perturbatè CL. CK :: ACq — ANq. ACq — ARq.

X. Simili planè diſcurſu, ſi fuerit AC. AB :: CZ. ZB: erit CZ. CK :: ACq — ANq. ACq — ABq. & CL. CZ :: ACq — ARq. ACq — ABq.

XI. Hinc perſpicuum eſt obliquioris reflexi concurſum à centro magis elongari quàm rectioris, quòd nempe ſit CL ⊏ CK. Cùm enim ſit ACq — ANq ⊏ ACq — ARq, erit CL ⊏ CK.

XII. Hinc neceſſariò duo quilibet ad eaſdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) ſeſe priùs quàm axem interſecabunt, puta ad X. quo poſito.

XIII. Adnotari poteſt angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus incluſum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ, vel duplo angulo NCR unà cum ang. NAR. || Etenim Fig. 83. ang. KXL = ang. ALR — AKN = ang. ACR + CRL — : ang. ACN + CNK = ang. ACR — ACN + : ang CRL — CNK = ang NCR + : ang CRS — CNP. || Quinetiam ang. CRS — CNP = ang. RCA + CAR — : ang. NCA +

CAN

CAN = ang. NCR + NAR. itaque rursus ang. KXL = 2 ang. NCR + ang. NAR. liquent igitur quæ propositа sunt; in usum (si fortè) sequentium. pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè procurrentes à se divergere; adeóque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire; consequentèr & puncti A tantùm unam à convexo speculo imaginem exhiberi. Fig. 83.

XV. *Lemmata* 1. Sint quæcunque tria quanta A, P, C; primóque sit A.B ⊏ B.C; dico fore A + C ⊏ 2 B. ponatur enim fore A.B :: B.E. erit ergò A + E ⊏ 2 B. quinetiam erit ergò B.E ⊏ B.C adeóque C ⊏ E. ergò magis A + C ⊏ 2 B.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundò A + C ⊐ 2 B. dico fore A.B ⊐ B.C. nam sive dicatur esse A.B :: B.C. vel A.B ⊏ B.C. sequetur utrobique fore A + C ⊏ 2 B; contra hypothesin. itaque potiùs est A.B ⊐ B.C.

XVI. Etiam hoc adjungo. Si duo sumantur ad easdem axi partes (circulíque convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit ANq + AXq ⊏ 2 ARq. Fig. 84.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; sint item NP, RQ ad AC parallelæ ducantúrque subtensæ NR, RX.; & quoniam ang. RXQ ⊏ ang. NRP; patet esse RX . RQ ⊐ NR . NP; adeóque cum RX = NR, erit RQ ⊏ NP; hoc est FG ⊏ EF. ergò 2 CF ⊏ CE + CG; unde 4 AC × CF ⊏ 2 AC × CE + 2 AC × CG atqui est ANq = ACq + CNq − 2 AC × CE. & AXq = ACq + CNq − 2 AC × CG. & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq − 4 AC × CF. ergo ANq + AXq ⊏ 2 ARq.

Addo, sequentium gratiâ, si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua similiter apparentur; fore contrà, tum ANq + AXq ⊐ 2 ARq. nam in eo casu est ANq + AXq = 2 ACq + 2 CNq + 2 AC × CE + 2 AC × CG. & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq + 4 AC × CF. unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus NR,

NR, RX; & incidentinm AN, AR, AX reflexi GN, HR, IX
Fig. 85. axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab obliquiorum occursibus conclusum majus ipso LK rectiorum occursibus intercepto.

Nam quoniam est AN q + AX q ⊏ 2 AR q. erit 2 AC q — AN q — AX q ⊐ 2 AC q — 2 AR q. adeóque AC q — — AX q. AC q — AR q ⊐ AC q — AR q. AC q — AN q. hoc est, è præmonstratis, CL. CM ⊐ CK. CL, vel inversè CM. CL ⊏ CL. CK. quapropter erit CM + CK. ⊏ 2 CL. & ideò CM — CL ⊏ CL — CK hoc est ML ⊏ LK: Q. E. D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magis inspissari, seu spatio versus limitem Z arctiore constringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe (velut ad O) constituatur oculi centrum, quod punctum A necessariò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente quoad radios ab infinitè dissito puncto manantes hypothesi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copiosiores, tum axi viciniores, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui facilius re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis axem collocato itidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obscuritate fortassis nimia viderentur. itaque jam opportunum autumo desistere.

Fig. 85.

Lect.

Lect. IX.

I. QUaliter in obverſum Speculi circularis convexum finitè diſtans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta conſtituto per ipſum radians & ſpeculi centrum trajecta poſtremò conniſi demonſtrare; nunc idem quoad aſpectum aliàs ubicunque ſitum aggredimur expiſcari. quò primum attinet ut rectam inveſtigemus, in qua conſiſtet Imago; tum ut punctum ejus in iſta recta præciſum determinemus. & primo quidem negotio ſatisfactum erit hujuſmodi *Problema* conficiendo; quod (ſequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datiſque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum tranſeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) ſint ambo in circuli peripheria, manifeſtum eſt biſecto arcu A X in N, connexiſque ſubtenſis N A, N X, rectas N A, N X ſibi mutuò reflexas fore; ſeu, junctâ C N, angulum C N X angulo C N A æquari. Fig. 86.

2. Etiam ſi datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, connexis A X, C X, factóque angulo C X H = C X A, fore X A, X H alterum alterius reflexum. Fig. 87.

3. Item ſi data puncta (A, X) æqualiter à centro diſtent; connexis rectis A C, X C, biſectóque angulo X C A à recta C N circulum reflectentem interſecante ad N; perſpicuum eſt conjunctas rectas A N, X N, invicem in ſe reflecti; vel angulum C N X ipſi C N A æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo exiſtant in recta per reflectentis centrum tranſeunte (nempe A B K C.)

1. Fiat C K. A C :: C B. T. ac inter C B, & T ſit proportione media V (unde C B q. V q :: C B. T :: C K. A C). tum centro A, intervallo $\sqrt{}$ :: A C q — V q. deſcribatur circulus reflectentem ſecans Fig. 89.

secans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipsius AN reflexa erit.

Fig. 89. Nam ob $ANq = ACq - Vq$. erit $Vq = ACq - ANq$. adeóque $CBq . ACq - ANq :: (CBq . Vq ::) CK . AC$. quod, è præmonstratis, reflectioni proprium est. ergò liquet propositum.

2. Ità quidem in hoc casu; at si punctum A ponatur aliàs, ut sit $AC \sqsupset AN$; reliquis stantibus, Sumendum erit intervallum $AN = \sqrt{: ACq + Vq}$; ut sit $ANq - ACq = Vq$. ut posthac constabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat 2 CK. CB::CB.E. & 2 CA.CB :: CB. E. sumatúrque $CQ = E + F$. & ducta QN ad AC perpendicularis circulum secet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è suprà dictis liquidò consectatur. At si fuerit $AN \sqsubset AC$; tum accipi debet $CQ = F - E$; & (reliquis nihil immutatis, uti postmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra casus hos *Problema*, ceu videtis, facilè constructur; ast illos; aliósque speciales, si qui sunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum est, & certè δυσμίχανον; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicarique poterit sibi peculiarem, hoc vel adsimili modo describendam.

Connexâ CA, super diametrum CA describatur circulus AIC; item semidiametro CA describatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC secantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG secent punctis H; demum per H, Fig. 90. & X rectæ ducantur ipsas CI decussantes punctis N. per hujusmodi puncta quævis designabilia transibit linea, *Problematis* expositi solutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis intersectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine subinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus est, erit recta AH bisecta in I. adeóque triangula ANI, HNI sibimet æqualia prorsus & æquiangula erunt; & speciatim ang. INA = ang. INX. unde patet propositum.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujusmodi constructiones, etsi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magis in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-

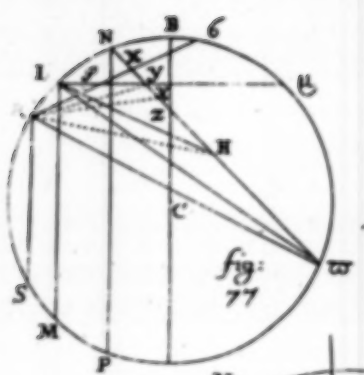


fig:
77

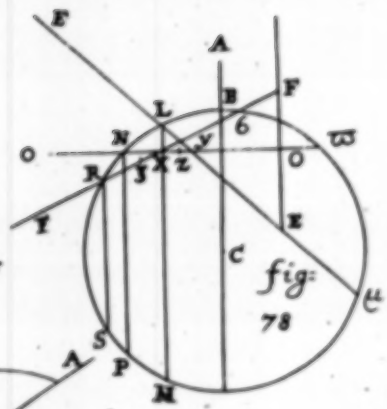


fig:
78

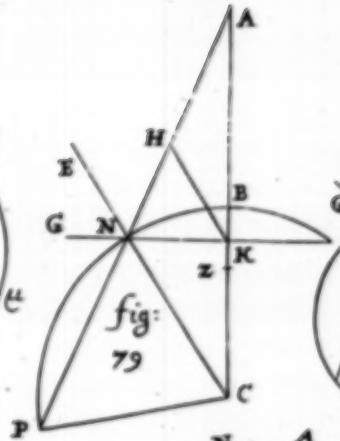


fig:
79

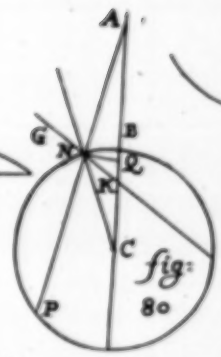


fig:
80

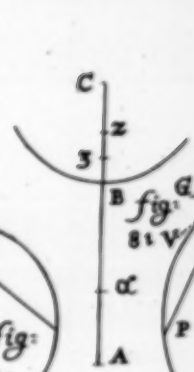


fig:
81

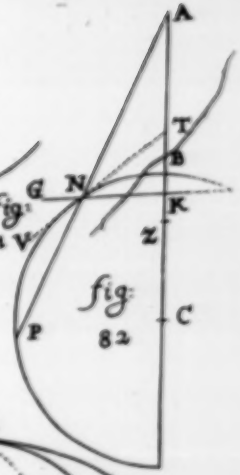


fig:
82

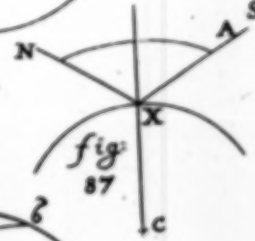


fig:
87

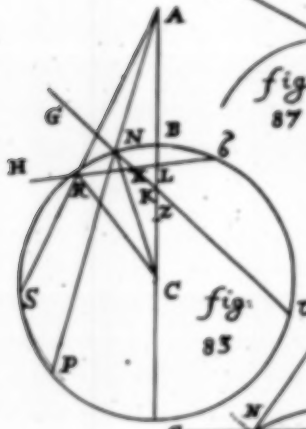


fig:
85

fig:
84

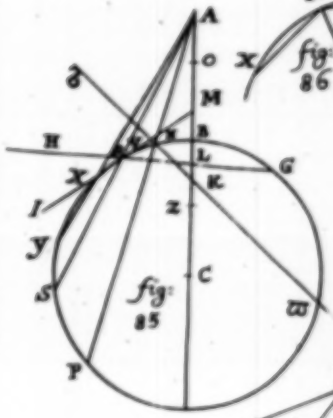


fig:
85

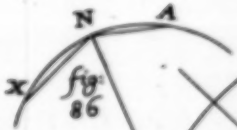


fig:
86

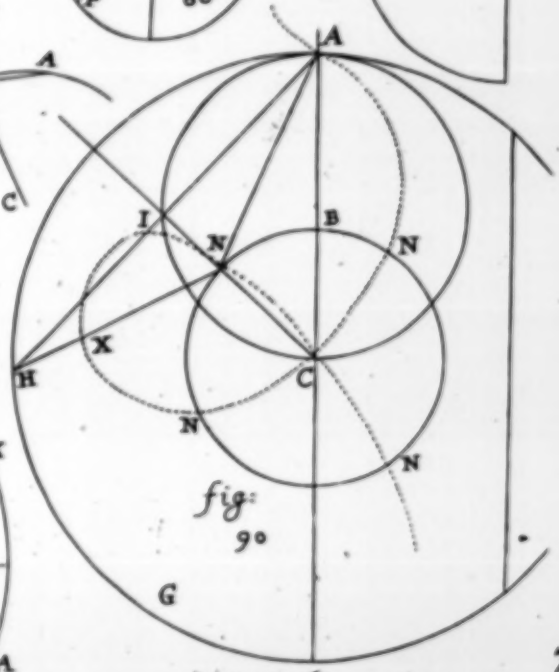


fig:
90

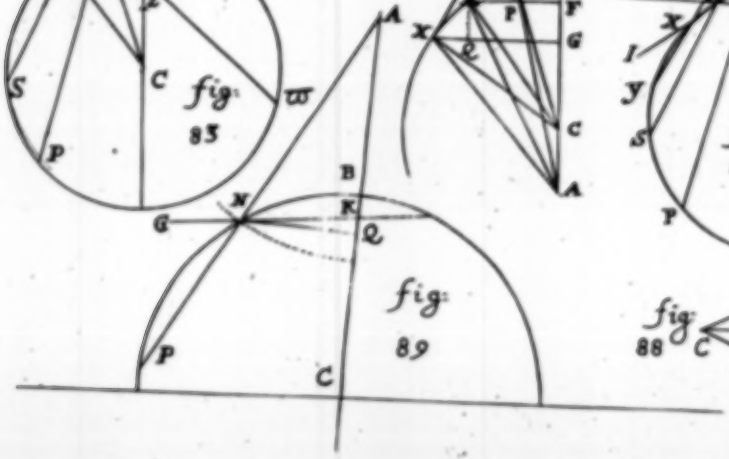


fig:
89

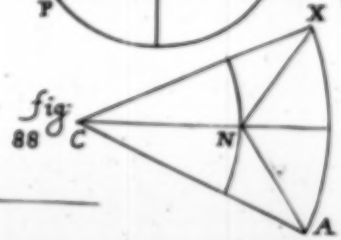


fig:
88

Opt pag 64

nihilominùs gravatim admittuntur; istâ tantummodò raptim insinuatâ, subnectemus aliam ab illorum gustu non abhorrentem; illam nempe (quando scilicet haud alia melior, ut varias pertentans analyses, & hoc in alia complura *Problemata* transformans existimari possum, facilè possit excogitari; quum & operæ meæ satis alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazenus Arabs* scriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate simul ac obscuritate; neque non ab incondita sermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorsum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema.*

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus sit; & in hujus uno crure P N adsignetur punctum F; per F recta ducenda est, quæ reliquum latus D P (protractam nempe) ac hypotenusam D N ità secet, ut ab illis intercepta ad segmentum hypotenusæ lateri primò conterminum datam obtineat proportionem R ad S. Fig. 91.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N describatur Circulus H F N (is nempe per F transibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. sit etiam R. S :: D F. T. & à puncto I ducatur recta I L K diametrum H N intersecans ad L, & circulo occurrens in K, ità quidem ut sit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præstetur in superioribus ostensum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipsam D P secans in X. Dico factum, vel ipse C X. C N :: R. S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang. F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C simile triangulo L K C; ac indè F D. D C :: K L. C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C; erunt triangula X D C, N K C sibi quoque similia, proindeque D C. C X :: C K. C N. quapropter erit ex æquali F D. C X :: K L. C N. vel permutando F D. C K :: C X. C N, hoc est F D. T (vel R. S) :: C X. C N; quod faciendum erat. *Constr. &*

Advertendum est autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protensa variè statui potest, vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in istorum casuum singulo quoque recta I K (conditione gaudens præstitutâ) plurifariam duci, potest; ut antehac inculcatum; unde plures emergent solutiones. at quoad omnes casus persimilis erit constructio, nec ferè diversa demonstratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus

centrum C) datáque sint duo puncta A, X; reperiendum est in circumferentia punctum aliquod, à quo ductæ ad A, X rectæ, altera sit alterius reflexa. || Hoc ità perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ A C, X C; & fiat (seorsim) ang. $\delta = \frac{1}{2}$ ang. A C X. & in $\xi\delta$ crure anguli δ sumpto liberè puncto ϖ ducatur ϖV ad $\xi\delta$ perpendicularis alterum crus secans in V; & in V ϖ protracta capiatur $\varpi\gamma = \varpi V$; tum dividatur γV in φ, ut sit $\gamma\varphi . \varphi V :: XC . CA$; perque punctum φ trajiciatur $\varkappa\xi$ sic ut sit $\varkappa\xi . \varkappa v :: CX . CN$. denique fiat angulus X C N æqualis angulo $\xi\varkappa v$; erit punctum N quale desideramus. Nam ducantur X N, ξv; & fiat ang. C N G = ang. $\varkappa v\gamma$. adsumatúrque P G = P N; & connectatur X G. liquet jam trangula X C N, $\xi\varkappa v$ similia fore; nec non ipsa C N F, $\varkappa v\varphi$; & ipsa X P F, $\xi\varpi\varphi$, ipsáque demùm X F N, $\xi\varphi v$ assimilari. quare P F . X F :: $\varpi\varphi . \xi\varphi$. & X F . F N :: $\xi\varphi . \varphi V$. & ex æquo P F . F N :: $\varpi\varphi . \varphi V$. & antecedentes duplando 2 P F . F N :: 2 $\varpi\varphi . \varphi V$. componendóque 2 P F + F N . F N :: 2 $\varpi\varphi + \varphi V . \varphi V$. hoc est G F . F N :: $\gamma\varphi . \varphi V$ (hoc est) :: X C . C A. ducatur jam N L ad X G parallela; quare est ang. L N G = ang. G = ang. X N G; & X G (X N) . N L :: G F . F N :: X C . C A. porro fiat ang. L N H = ang. X C A; & H N protracta ipsi C A occurrat in M; estque propterea triangulum H N L simile triangulo H C M; idcircóque H C . C M :: H N . N L. ducatur denuo tangens N Q, estque tum ang. P N Q = rect — C N P = rect — $\varkappa V\varpi$ = ang. $\delta = \frac{1}{2}$ X C A; vel 2 ang. P N Q = ang X C A = ang L N H. verùm erat priùs 2 ang. X N F = ang. X N L. ergo 2 ang X N F — 2 ang P N Q = ang X N L — ang. L N H. hoc est 2 ang X N Q = ang. X N H. ergo tangens N Q bisecat angulum X N H; indéque consectatur fore rectam H M ipsius X N reflexam; ac ideò esse X C . H C :: X N . H N. atquì fuit priùs H C . C M :: H N . N L quare jam erit ex æquo X C . C M :: X N . N L (hoc est etiam è præmonstratis) :: X C . C A. unde C M = C A. quapropter H M, ipsius X N reflexa transit per A: Quod propositum erat efficere. ||

Lem. præced.

VIII. Hujusce *Problematis* ità generaliùs propositi varii quidem casus sunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque positum est intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum casuum unoquoque pluries conficitur negotium) ast ubique non absimilis erit constructio; sanè nimius essem, meámque pariter ac vestram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; sufficerit ejusce specimen aliquod protulisse.

IX Adnota-

IX. Adnotabimus tantùm quòd ex *Problematis* hujuſce natura conſtructioneque propoſita ſatis attendenti conſtabit (utique ſicut in *Hypotheſibus* antehac tractatis uberiùs eſt declaratum) duorum tantùm ad eaſdem axis partes incidentium reflexos ad unum ſeſe punctum decuſſare. nam aliorum unius (qui ſubinde poteſt dari) vel alterius reflexi per ejuſmodi punctum tranſeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus elucefcit datis puncti radiantis, oculique poſitione deſignari poteſt linea quævis, in qua dicti puncti ſpecies apparebit; incumbit proximè punctum in ea præciſum determinare, ad quo eadem conſiſtit. eo ſpectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii AN, AR in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum NR (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum PS; eorum verò reflexi intercipiant arcum $\sigma\sigma$; erit arcus $\sigma\sigma$ æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcûs NR, & arcûs PS. Nam (1) in prima figura; eſt $PS + SR + RN = PN = N\sigma = \sigma\sigma + \sigma R - RN$, ergò, pares hinc indè SR, & σR ſubducendo, erit $PS + RN = \sigma\sigma - RN$. proindéque $PS + 2RN = \sigma\sigma$. (2). in altera figura; erit $PS + SR - RN = PN = N\sigma = RN + R\sigma - \sigma\sigma$. quarè rurſus æquales auferendo SR, $R\sigma$ manebit $PS - RN = RN - \sigma\sigma$ unde tranſponendo erit $\sigma\sigma = 2RN - PS$. Fig. 95, 96.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adſcribemus: Biſecetur recta NP in E; & ubivis ſumatur punctum A; erit $EA = \frac{PA \pm NA}{2}$. Nam Fig. 94.

$$EA = \frac{PN}{2} \pm AN = \frac{PN \pm 2AN}{2} = \frac{PA \pm AN}{2}.$$

XII. Exhinc, ut propoſitum citiùs attingamus, Suppoſito radios AN, AR (quoad caſum præſentem) ſibi quàm proximos incidere, punctum deſignabimus ad quod ipſorum reflexi $N\sigma$, $R\sigma$ concurrunt; dicimus utique ſi dicti reflexi concurrant ad Z: biſectis ſubtenſis NP, $N\sigma$ in E, & F, fore $FZ . ZN :: EA . NA$. || Nam quoniam arcus NR, PS ex hypotheſi ſunt indefinitè parvi (ſeu minimi) ſe habebunt ut ſuæ ſubtenſæ; nec non idem de arcubus NR, $\sigma\sigma$ dici poteſt. igitur arc. $PS . RN :: PS . RN :: PA . RA$. (hoc eſt ob RA, NA nihil, ex eadem hypotheſi, differentes) $:: PA . NA$. ergò, bis componendo, erit $PS + 2RN . RN :: PA + 2NA . NA$. Fig. 95, 96.

hoc est $\sigma\varpi . RN :: PA + 2NA . NA$. est autem arc $\sigma\varpi . RN$ :: subtensa $\sigma\varpi . RN :: \varpi Z . ZR :: \varpi Z . ZN$. ergo $\varpi Z . ZN :: PA + 2NA . NA$. & componendo $\varpi N . ZN :: PA + 3NA . NA$ & antecedentes subduplando $FN . ZN :: \frac{PA + 3NA}{2} . NA$. denique dividendo $FZ . ZN :: \frac{PA + NA}{2} . NA$. est autem $EA = \frac{PA + NA}{2}$. ergò tandem est $FZ . ZN :: EA . NA$: Q. E. D.

XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo $GN\varpi$ constituti, tanquam ad O. etenim superiùs nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legisve ratum, fixúmque censeri queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum intersecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

Fig. 95, 96.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talique quæ conclusionis adsertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihimet accerserem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exhaurirem. suffecerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modò tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda. ||.

Lect.

Lect. X.

I. IN poſtrema Lectione quod ſpectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magis ὑπ'ὄψιν, contemplabimur. & quidem caſuum præcipuorum diverſitatem imprimis diſtinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta AC protendatur indefinitè; quo poſito.

II. 1. Incidat radius AN; & ſit AN = AC; erit ipſius AN reflexus, puta N α, ad AC parallelus. Fig. 97.

Hoc è ſupra generatim oſtenſis conſtat; & facilè jam patet, connexâ CA. etenim eſt ang. ACN = ANC; ob AC, AN, ex Hypotheſi pares; & ang. ANC = α NC, propter reflectionem, adeóque ang. ACN = α NC; unde ſunt AC, N α ſibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius AM major ipſâ AC; ejus reflexus (puta M α) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, reſpectu puncti A, (hoc eſt centrum C puncto radianti, concurſuique interjacebit). Fig. 98.

Nam ob AM ⊏ AC, erit ang. ACM ⊏ AMC = CM α. ergò ang. BCM + CM α ⊐ ang. BCM + ACM = 2 rect. quare M α, CB convenient infra CM ad partes α B; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius AR; & ſit AR minor ipſâ AC; ejus reflexus, puta R α, axi retrò protractus occurret. (hoc eſt ut radians centro, concurſuique ſit interjectum). Fig. 99.

Nam hìc ob AR ⊐ AC; erit ang. ACR ⊐ ang ARC = ang. α RC. quapropter ang. DCR + α RC ⊏ 2 rect. unde patet ipſas DC, α R protractas infra CR concurrere.

V. Horum

V. Horum casuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius disterminat. de posteribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus. Sit jam itaque primò AC = AG = Aγ; unde quilibet incidens cavo GBγ radius (ut AN) major erit quam AC; hujus itaque reflexus axem secet puncto K; dico, si semidiameter CB dividatur in Z; ut sit CZ. ZB :: AC. AB; fore CK ⊏ CZ. etenim ob angulum ANK bisectum, erit AC. CK :: AN. NK. vel permutando AC. AN :: CK. NK. est autem AC. AB ⊐ AC. AN ergo AC. AB ⊐ CK. NK ⊐ CK. BK. ergò cùm sit, ex hypothesi, CZ. ZB :: AC. AB; erit CZ. ZB ⊐ CK. BK. componendóque CB. ZB. ⊐ CB. KB. unde ZB ⊏ KB; seu CZ ⊐ CK: Q. E. D.

Fig. 101.

Fig. 100.

VI. Hinc punctum Z est limes infra quem, Versus centrum, nullus reflexus axem intersecat.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ sint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit CZ ⊏ Cζ.

Nam BC. AC ⊐ BC. αC. componendóque AB. AC ⊐ αB. αC. hoc est ZB. ZC ⊐ ζB. ζC. vel compositè CB. ZC ⊐ CB. ζC. ergò ZC ⊏ ζC.

VII. Quinetiam erit in hoc casu, ANq — ACq. CNq :: AC. CK. Nam ducatur KH ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H, & connectatur CP, & eodem planè modo quo superiùs (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore AN × NP. CNq :: AK. CK. unde divisim erit AN × NP — CNq. CNq :: AC. CK. est autem AN × NP = ANq — AN × AP = ANq — : ACq — CNq = ANq — ACq + CNq; adeóque AN × NP — CNq = ANq — ACq. ergò demum erit ANq — ACq. CNq :: AC. CK: Q. E. D.

Notetur; si fuerit AC minor semisse semidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad eadem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; sin AC major fuerit istâ Semisse, focis qui ad diversos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interferam *Theorema*, præmissis conforme: Si fiat 2 CK. CN :: CN. F; itémque 2 CA. CN :: CN. E;

&c

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit $CQ = F - E$. ‖ Nam (ut suprà) est $CA . CK :: F . E$. quare dividendo erit $CA - CK . CK :: F - E . E$. Item hîc erit $ANq - ACq = 2AC \times CQ + CNq$. adeóque $2AC \times CQ + CNq . CNq :: AC . CK$. hoc est, (ob $CNq = 2AC \times E$.) $2AC \times CQ + 2AC \times E . 2AC \times E :: AC . CK$. hoc est $CQ + E . E :: AC . CK$. quare dividendo $CQ . E :: AC - CK . CK$. ergò $F - E = CQ$: Q. E. D.

IX. Porrò, si duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secent punctis K, L; erit $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$. Nam ob $CK . AC :: CNq . ANq - ACq$. & $AC . CL :: ARq - ACq . CNq$. erit ex æquo perturbatè $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$.

X. Hinc si radius AR sit ipso AN obliquior; erit $CK \supset CL$. Nam $ARq - ACq \supset ANq - ACq$.

XI. Hinc palàm est reflexos NK, RL sese priùs quàm axem decussare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus NR, RX, & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium LM, obliquiorum occursibus interjectum, majus esse spatio LK, quod rectiorum continetur occursibus. Nam è suprà monstratis constat esse $ANq + AXq \supset 2ARq$. proindeque fore $ANq + AXq - 2ACq \supset 2ARq + 2ACq$. ac indè $ANq . - ACq . ARq - ACq \supset ARq - ACq . AXq - ACq$. hoc est $CL . CK \supset CM . CL$. vel $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quare $CM + CK \sqsubset 2CL$. & ideò $LM \sqsubset KL$. Fig. 102.

XIII. Hinc rectiùs ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidnam demùm rursus ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo aspiam in AZ constituto, apparere?

XV. Adversatur saltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo aspiam in ZB collocato confusiorem apparentiam objici, quippe

cùm eum tunc reflexi convergentes appellant; & imago distinctior Z post oculum consistat. quin ejusmodi complures apparentias observabitis ipsi si lubet, & ex his deducetis ||

XVI. Præterea, *dato oculi centro, velut O, quomodo designandus sit ipsum pervadens reflexus* (ceu N ϖ) è suprà tractatis aliquatenus
Fig. 103. adparet. nec inibi generaliùs expositum *Problema* libet hic reponere.

XVII. Quinetiam antedicta recensendo constabit, si bisecentur subtensa PN in E; & subtensa N ϖ in F; ac fiat FZ.ZN::EA.NA; radiantis imaginem, visûs O respectu, circa punctum Z consistere. planè similis est discursus, quorsum κακκυζειν. ||

XVIII. Superest tantùm, ut de posteriore quem innuebamus casu paucula subdamus. Eò, ponatur AC = AG = Aγ; indè quilibet incidens cavo GBγ radius ipsâ AC minor erit; sit talis alicujus AN reflexus N ϖ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hic præcedentibus conformia deprehendentur, & suppari demonstrabuntur modo; qualia sunt nempe

XIX. AC.AN::CK.KN.

XX. ACq — ANq.CNq::AC.CK.

XXI. Radii AR ipso AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit CK.CL::ACq — ARq.ACq — ANq. ac indè

XXII. CK ⊐ CL.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares, ut superiùs, arcus in reflectente sumendo) reflexi concursus habent à se minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos casus præmonstratis conformia, vel agnata persimili quoque quoad hunc casum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; sed enim id quod ubique præcipuum etiam hic exertiùs ostendam; præmisso tamen hoc, ad sequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio:*

XXIV. Detur recta BC, in ea protracta designandum est punctum,
Fig. 104. velut Z, ita ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. || Mirabilè sic exequimur. ||

1. Si

1. Si fuerit I ⊏ R; fiat I — R. R :: BC. CZ; quare componendo erit I. R :: BZ. CZ. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin I ⊐ R, fiat R — I. I :: BC. BZ. ergò rursus componendo R. I :: CZ. BZ. vel inversè, I. R :: BZ. CZ.

XXV. Fiat jam CA. AB :: CZ. BZ; Dico punctum Z esse metam, citra quam (respectu centri C) nullus reflexus axem decussabit, hoc est præmissis insistendo, fore CK ⊏ CZ.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo NK. NA :: KT. AT ⊐ BK. AB. quare NK. NA + AB. BZ ⊐ BK. AB + AB. BZ = BK. BZ. est verò NK. NA :: CK. CA. & AB. BZ :: CA. CZ. ergò CK. CA + CA. CZ ⊐ BK. BZ. hoc est CK. CZ ⊐ BK. BZ. vel permutando CK. BK ⊐ CZ. BZ. unde dividendo CB. BK ⊐ CB. BZ. adeóque BK ⊏ BZ. unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consectatur ejusmodi punctum Z esse locum ipsissimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA constituto; patétque quàm longè passim ab Opticis, nominatim à novissimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrio*, in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta Q) tanto semotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipso B distat. id quod præterquam quòd nullâ verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur, cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum A accensa candela speculo cavo GBγ exponatur, oculo velut ad O sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso BQ, quod ipsam AB exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantiâ, sed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad sensum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circà discursus noster experientiæ suffragio constabilitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis respectu visûs extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo, bisecando scilicet ipsas NP, Nπ punctis E, F; faciendóque EA. AN :: FZ. ZN. Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere, sed in obliquioribus intra illum, nempe si fuerit AE ⊏ AN punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB existet; sin AE ⊃ AN, punctum Z versus ● existet; sin AE = AN, concursus infinitè distabit, seu proximus reflexus ipsi N ● parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si AE = AN, erit $\frac{1}{2}AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN$ Fig. 106. $= 3ANq$, itaque punctum N, istos casus disterminans, facilè designatur.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satis, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermissam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consectari. quin & hinc generatim verum apparebit satis: Si fuerit Z ipsius A imago, tantum unus idcircò ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpius in decursu inculcata satis arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam indè duo per Z transibunt, contra hypothesin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexi; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt; & quædam in abstractione summa non ità facilè vèl explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promoviſſe, haud disparia (certè magis nova, minimèque protrita) circa refractiones sphæricas, seu circulares, attentabo.

LECT. XI.

I. *Ataptricâ circulari defunctus ad Dioptricam promovemur*; quorſum incidentium quotcunque refractis unâ ſimulo perâ delineandis, adeóque refractionum ſymptomatis organicè pertentandis modum imprimis exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorſim ad $v\gamma$ æqualem diametro (N G) circuli refringentis deſcribatur circulus $v\bullet\gamma$. item habeat $v\gamma$ ad $S\gamma$ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, conſtanter nuncupabo rationem I ad R) & ſuper diametro $S\gamma$ deſcribatur quoque circulus $SH\gamma$. Incidat jam radius quilibet M N P, cui conveniens deſignandus eſt refractus. ut hoc aſſequamur, circulo adpoſito à V adaptetur $v\bullet = NP$; & centro γ per $\bullet$ deſcriptus circulus ſecet circulum $SH\gamma$ in H; connexáque γH circulum $v\bullet\gamma$ interſecet in ξ. demùm connexâ $v\xi$, circulo N P G accommodetur $NX = v\xi$; erit N X ipſius N P refractus. Etenim (ductis G P, G X) eſt $\gamma H . \gamma\xi :: (\gamma S\gamma v ::)$ I. R. hoc eſt $\gamma\bullet . \gamma\xi :: I . R$. hoc eſt G P. G X :: I. R. cùm itaque ſint ipſæ G P, G X recti ſinus angulorum $GN\bullet$, G N X (quorum G N P eſt angulus incidentiæ) liquet propoſitum. Fig. 107. 108.

II. Ad ipſa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quaſi diſtantiam poſito, ſeu parallelos ad ſenſum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta A C Z; tum fiat B Z. C Z :: I. R; nec non dividatur C Z in F, ut ſit F Z. F C :: I. R; & centro F per Z deſcribatur circulus E G Z. his peractis, accipiatur jam quilibet ad A C parallelus M N P (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico ſi recta N C (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo E G Z protracta occurrat in G; & Fig. 109.

in axe capiatur CK = CG; connectatúrque recta NK, fore NK ipſius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam eſt BZ.CZ:: (I.R::) FZ.FC; erit permutando
Fig. 109. BZ.FZ::CZ.FC. dividendóque BF.FZ::FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera ſcilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) ſimilia fore. quamobrem erit BG.GF::GC.CF. ſeu permutatim BG.GC::GF.CF. hoc eſt BG.GC::FZ.CF::I.R. verùm in triangulis BCG, NGK eſt BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC::NK.CK. quare erit quo-
* Lect. 3. numero. 10. que NK.CK::I.R. ergò, *ſecundum generatim antehac oſtenſa, liquet NK ipſius MN refractum exiſtere.

Coroll. Adnotetur eſſe triangula BFG, GFC ſimilia; ac eſſe BG.CC::I.R; & ang. BGF = GCF; & eſſe BF, FG, FC ÷÷ &c.

III. Ex hoc (ſanè pulchro, perutilique *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujuſmodi quotcunque refractos expeditiſſimè ſeu delineandi, ſeu computandi; tum ipſorum præcipua *ſymptomata* facilimè diſcernuntur ac demonſtrantur. qualia ſunt, quæ in ſubjectis exhibentur *Corollariis*.

IV. Patet hinc punctum Z eſſe limitem ultra quem (reſpectu centri) nullus axem interſecat refractus; ſeu perpendicularis ipſius AB (vel ei ſaltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z terminari. quia nimirum eſt CZ ⊏ CG, vel CR.
Fig. 110.

V. Conſequitur etiam, ſi duorum incidentium MN, QR (quorum QR ſit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore
Fig. 111. CK ⊏ CL. Etenim ſi rectæ NC, RC ad circulum refractarium (ità circulum EGZ meritò ſubinde nominabimus) producantur, ut ipſum ſecent punctis G, H; liquet eſſe CG ⊏ CH; adeóque CK ⊏ CL. Hinc

VI. Ad eaſdem partes incidentium refracti ſeſe priùs interſecant quam axem; (veluti puta refracti NK, RL ſeſe decuſſant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, ſi in primo caſu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y eſſe limitem refractionis cite-

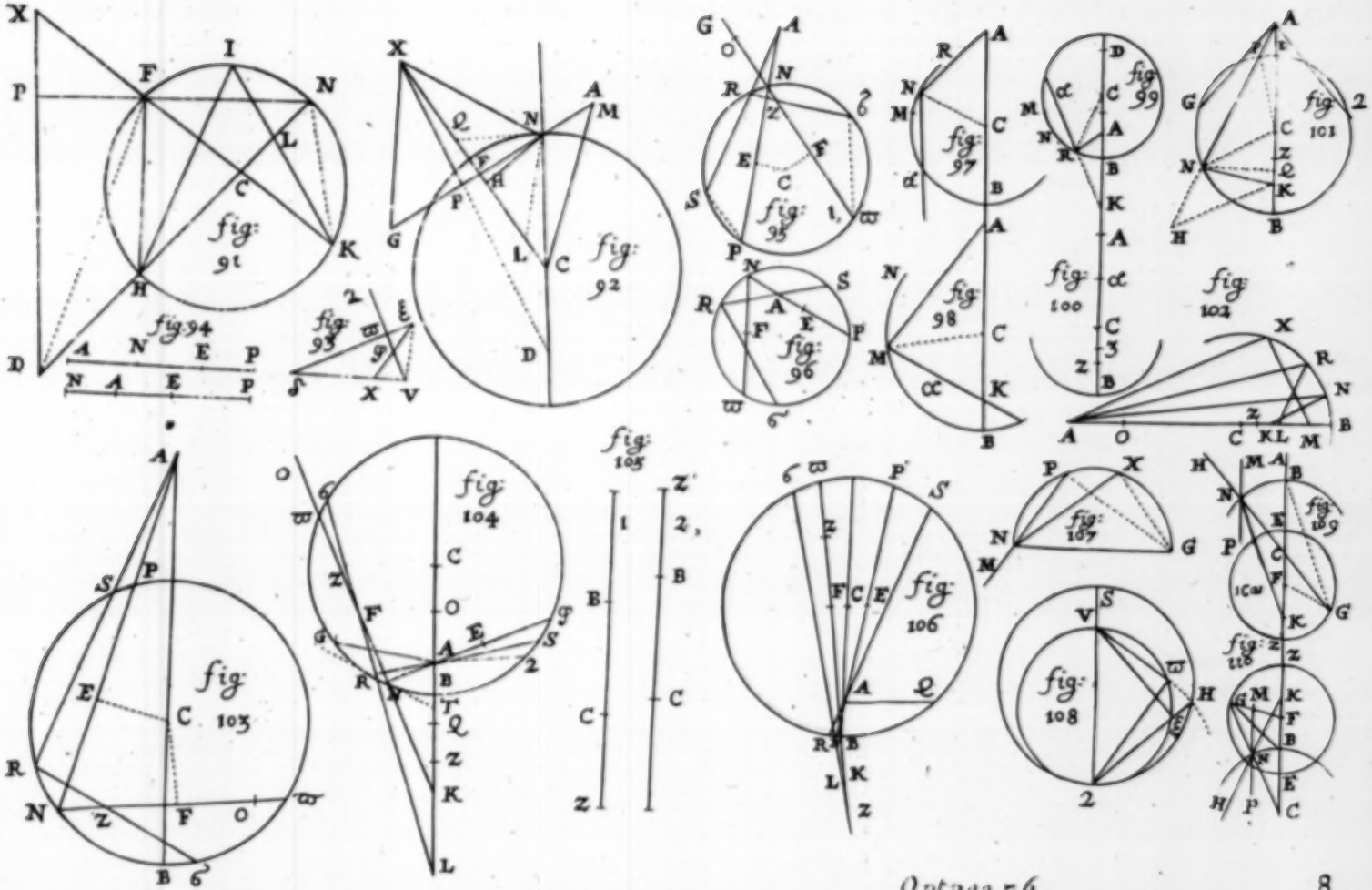


fig. 91
fig. 92
fig. 93
fig. 94
fig. 95
fig. 96
fig. 97
fig. 98
fig. 99
fig. 100
fig. 101
fig. 102
fig. 103
fig. 104
fig. 105
fig. 106
fig. 107
fig. 108
fig. 109
fig. 110

citeriorem: erit enim connexa VY refractus obliquissimi radii, ceu TV, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta CVI circulum EGZ tangat in I, & adsumatur CY = CI, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa VY refractus erit incidentis (puta VT) ad BC paralleli; qui certè cunctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmissis) connexâ FI, sit FI.CF::I.R. hoc est sinus rectus anguli FCI (vel anguli CVT) ad sinum totum, ut I ad R; nullus ipso TV obliquior medium BNV penetrabit; at ipse quicunque talis repercutietur; velut ☿ ↓ in ☿ ♌. Fig. 112. *Lib. 3. num. 7.

IX. Cæterùm hic (tametsi præter ordinem non nihil, extráque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interseremus: Omnium à puncto B promanantium, & a circuli EGZ cavis partibus refractionem patentium (juxta casus prænominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius BG, & (stantibus quæ præstructa præmonstratáque sunt) triangula BGF, GCF similia sunt; angulúsque BGF par angulo GCF; itemque FG.CF::I.R; est autem FG ad CF, *ut Sinus anguli* GCF *hoc est anguli* BGF *ad Sinum anguli* CGF. *ergò Sinus anguli* BGF *(qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* CGF se habet, ut I ad R. ergò CG *c* est refractus ipsius BG: Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R; etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in *Dioptrica* desideratum, perquam utile; Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypothesin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iisque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ CB, EZ, CE, CZ, CF eadem in uno, quas in altero quovis proportiones observant; id quod facilimè demonstratur; & satis elucescit

ceſcit ex eo, quod earum omnium ad ſe proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro ſequentibus hæc adjungo *Lemmata.*

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) ſe deinceps æqualiter excedentia; ſint etiam altera totidem M, N, O; & ſit A. B :: M. N; ac B, C :: N, O; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica.* Nam ob A. B :: M. N. erit diviſim A — B. B :: M — N. N. item ob B. C :: N. O. erit per rationis converſionem B. B — C :: N. N — O. ergò erit ex æquo A — B. B — C :: M — N. N — O. itaque cùm ſit ex Hypotheſi A — B = B — C; erit etiam M — N = N — O: Q. E. D.

XII. 2. In circuli quadrante Z Q trium arcuum Z G, Z H, Z I Sinus recti F α, F ζ, F γ æqualiter creſcant (ut nempe ſit α ζ = ζ γ) dico fore G α — H ζ ⊐ H ζ — I γ.

Fig. 115.

Nam ducatur ſubtenſa G I ipſam H ζ ſecans, in X; & ſint X R, I S ad F Q parallelæ; patet ipſas G R, X S æquari hoc eſt fore G α — X ζ = X ζ — I γ; unde liquidum eſt eſſe G α — H ζ ⊐ H ζ — I γ: Q. E. D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes F Z X, F ζ ξ; & ad F Z parallela ducatur recta quævis L G γ; circulos interſecans punctis G, γ; dico fore F Z — L G ⊏ F ζ — L γ.

Fig. 116.

Nam connexa F G circulum ζ γ ξ producta ſecet in T; connectantúrque ſubtenſæ Z G, ζ T (hæc ipſam L γ ſecans in S) Patétque jam rectas Z G, ζ T parallelas eſſe; adeóque quadrangulum Z G S ζ fore parallelogrammum; unde G S = Z ζ; adeóque F ζ — L S = F Z — L G. ergo F ζ — L γ ⊐ F Z — L G: Q. E. D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli M N, Q R, V X, à ſe diſtantes æqualiter (hoc eſt ut ductis N ν, R ρ, X ξ ad axem A C perpendicularibus ſit X ξ — R ρ = R ρ — N ν) & ipſorum refracti cum axe conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concurſibus interjectum ſpatium O L majus ſpatio L K, quod à rectiorum occurſibus continetur.

Fig. 117.

Nam ducantur N C, R C, X C circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares F π, F ζ, F γ; & quoniam triangula C X ξ, C F γ ſimilia ſunt; erit X ξ. C X :: F γ. C F. item ſimili de cauſa, eſt C R (C X).

R ρ

$R\rho :: CF.F\zeta$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\rho :: F\gamma . F\zeta$. non dispare ratione constabit esse $R\rho . NV :: F\zeta . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\rho$, NV se æqualiter excedant; *etiam tres $F\gamma$, $F\zeta$, $F\alpha$ se æqualiter excedent; unde consequetur esse $C\alpha - C\zeta \sqsupset C\zeta - C\gamma$; nec non esse *$\alpha G - \zeta H \sqsupset \zeta H - \gamma I$; adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc est $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc est denuò $LK \sqsupset OL$: Q.E.D.

*21 hujus Lect. Hyp.

*22 hujus Lect.

XV. Hinc apparet rectiùs illapsam refringenti lucem magis inspissari; versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focúmque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consectatur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipso readunari, seu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt; quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpiùs admonitum: — ἐχθρὸν δέ μοι ὅστιν Αὔτης ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογήσειν. cæterùm hâc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

Lect.

Lect. XII.

1. *Parallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixus, præter alia præcipua ſymptomata, locum ultimò determinavi, quam iſti repræſentant, imaginis, oculo in axe conſtituto.* res jam poſtulat ut eandem definiamus oculi gratiâ ſecùs collocati. veruntamen unam priùs haud inutilem adnectam obſervationem, ad præcedentia ſpectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta N B R, v ς ϱ latitudines (vel ſubtenſas) N R, V ϱ æquales habeant; quorum V ς ϱ ad majorem pertineat circulum; hoc cùm potentiùs aduret, tum objectum viſibile clariùs atque diſtinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii ſint E G Z, κ γ ζ; horúmque centra F; φ; tum parallelorum punctis N, v incidentium ſint refracti N D, V δ; dico tum fore D Z ⊏ δ ζ. || Ducantur enim rectæ N C G, V κ γ; húſque perpendiculares rectæ F L, φ λ. éſtque C N. v ω :: C N. N P :: C F. F L. & v ω. κ v :: φ λ. κ φ. ergò (rationes ſibi pares adjungendo) eſt C N. v ω + v ω. κ v :: C F. F L + φ λ. κ φ. hoc eſt C N. κ v :: C F × φ λ. F L × κ φ. eſt autem 23. 11 *Lag.* C N. κ v :: C F. κ φ :: C F × φ λ. κ φ × φ λ. quapropter erit C F × φ λ. F L × κ φ :: C F × φ λ. κ φ × φ λ; & idcircò F L × κ φ = κ φ × φ λ; indeque F L = φ λ. hinc conſequetur fore C F — C L ⊏ κ φ — κ λ; nec non F Z — L G ⊏ φ ζ — λ γ; proindeque conjunctim C Z — C G ⊏ κ ζ — κ γ; hoc eſt C Z — C D ⊏ κ ζ — κ δ; hoc eſt demum D Z ⊏ δ ζ; exhinc lux ab arcu v ς ϱ magis conſtipata, (in ſpatium quippe reſtrictius δ ζ coacta) violentiùs operabitur; & a fonte magis ad punctum accedente promanare viſa punctum radians diſtinctiùs exhibebit; id quod inſtitutum fuit oſtendere; quo rei paſſim obſervatæ, nec exilis in perſpiciliorum conſtructione uſûs ratio conſtaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi reſpectu quomodocunque ſiti quem in finem conficiendum venit imprimis hujuſmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iſte verſatur:

III Dato

III. Dato circulo refringente; punctóque quovis X; per punctum X ducatur recta, quæ ſit incidentis ad datam poſitione rectam CB parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe CB; facillimè perficitur negotium; etenim ſi fiat R.I::CX.T; & centro X intervallo ipſam T adæquante deſcribatur circulus refringentem interſecans in N; è præmiſſis admodum patet connexum NK per N incidentis ad BC paralleli refractum eſſe; quia ſcilicet eſt CX.XN::CX.T::R.I. Fig. 120.

IV. Verùm extra caſum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum eſt, aut pluſquam Solidum (ut ex analyſi non difficilè perſpiciatur) & certè viâ conſuetâ, per lineas vulgò receptas, conſtructu perquam arduum & operoſum; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta ſit methodus ejuſmodi conſtructionem non unam moliendi, ægrè poſſim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum expoſcit; ſuffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam ſibi peculiarem, punctatim facili negotio deſignabilem, ità conſtrui poſſit, ut unà ſuam naturam ac indolem prodat. modus ille ſic habet.

V. Connectatur recta CX; fiátque CX.CV::R.I; & per punctum V indefinitè protendatur recta FG, datæ CB parallela; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque CI exeant, rectam FG decuſſantes punctis H; & centro X, intervallo rectas VH perpetuùm æquantè deſcripti circuli rectis CI occurrant punctis N; per hujuſmodi puncta quævis linea tranſit, quam innuimus expoſiti *Problematis* Solutioni deſerviturum; ejus ſcilicet, & dati circuli refringentis interſectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipſi BC parallelam; ſeu viciſſim hæc in illam. Sit enim talis interſectio quævis N; & ducta NX ipſam BC ſecet in K; & ſint NM, ac XT ad BC parallelæ. Eſtque tum CK.KN::(TX.XN::TX.VH::CX.CV::) R.I; unde ſecundum oſtenſa liquet NXK refractum eſſe ipſius MN; quod oportebat factum. Ità *Problema Auctoris* utcunque licebit exequi, nec non ejuſce qualitatem intueri; quot refracti per oculi centrum meant definire, ſingulóſque reipſâ deſignare; quæ longiuſculum eſſet ſigillatim exponere: cum autem eâtenus imaginis locus

 Fig. 121.

habeatur determinatus; succedit ut breviter etiam ipsissimum in singulo tali refracto punctum ostendamus, ad quod illa consistit. in cujus rei gratiam hoc quasi *Lemma* præsternemus.

Fig. 122.

VI. In circulo ANB, cujus centrum C, sint Semidiametro CA perpendiculares NE, RF; item Semidiametro CB sint perpendiculares NG, XH; sint autem CE, EF ipsis CG, GH proportionales; & arcus NR, NX indefinitè parvi; seu quasi minimi dictâ conditione prædíti; dicimus arcum NR ad arcum NX rationem habere conflatam è rationibus ipsarum CE ad CG, & NG ad NE; vel esse arc. NR, NX :: CE × NG. CG × NE. Nam per N ducatur VT tangens circulum, ipsisque FR, HX occurrens punctis T, V. est itaque (propter Summam ex Hypothesi parvitatem dictorum arcuum) arc NR. CN :: NT. CN :: EF. EN. item CN. arc NX :: CN. NV :: NG. GH. quapropter erit arc NR. CN + CN. arc NX = (EF. EN + NG. GH = EF. GH + NG. EN =) CE. CG + NG. EN. hoc est arc NR. arc NX = CE. CG + NG. EN: Q. E. D. (vel arc NR. NX = CE × NG. CG × EN.)

VII. Sit jam radii cujusvis talis MNP, refringentem intersecantis punctis N, P, refractus Nσ (refringentem nempe denuò secans in σ) huic autem indefinitè vicinus (& quasi proximus) adjaceat radius QRS, cujus itidem refractus Rσ (refringenti nempe rursus occurrens in σ), priorem Nσ decussans in Z; bisecentur autem subtensæ NP, Nσ punctis G, E: Dico rationem NZ ad GZ componi è rationibus NG ad NE, & CE ad CG.

Fig. 123, 124.

Nam ducantur rectæ CE (hæc ipsam RS quoque secans in F) & CG; nec non CI ad Rσ perpendicularis; & in protracta CG sumatur CH = CI; & per H ducatur XY ad Nσ parallela, seu perpendicularis ad CH; unde est XY = Rσ; & arc NX = Yσ; & arc XY = arc Rσ; adeóque arc NR $\pm$: $\sigma\sigma$ = 2 arc NX. Estque præterea CG. CE :: R. I :: CI. CF :: CH. CF; adeóque permutatim CG. CH :: CE. CF. ergò (juxta præcedentem) est arc. NR. NX = NG. NE + CE. CG. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum NR, SP, $\sigma\sigma$ exiquitatem, erit arc NR. $\sigma\sigma$ :: subtensa NR. $\sigma\sigma$ :: NZ. Zσ :: NZ. Zσ. ergò (inversè componendo, vel dividendo, tum & consequentes subduplando) arc NR. $\frac{\text{arc NR} \pm \sigma\sigma}{2}$ :: NZ. $\frac{\text{NZ} \pm \text{Z}\sigma}{2}$. atqui velut modò dictum)

arc

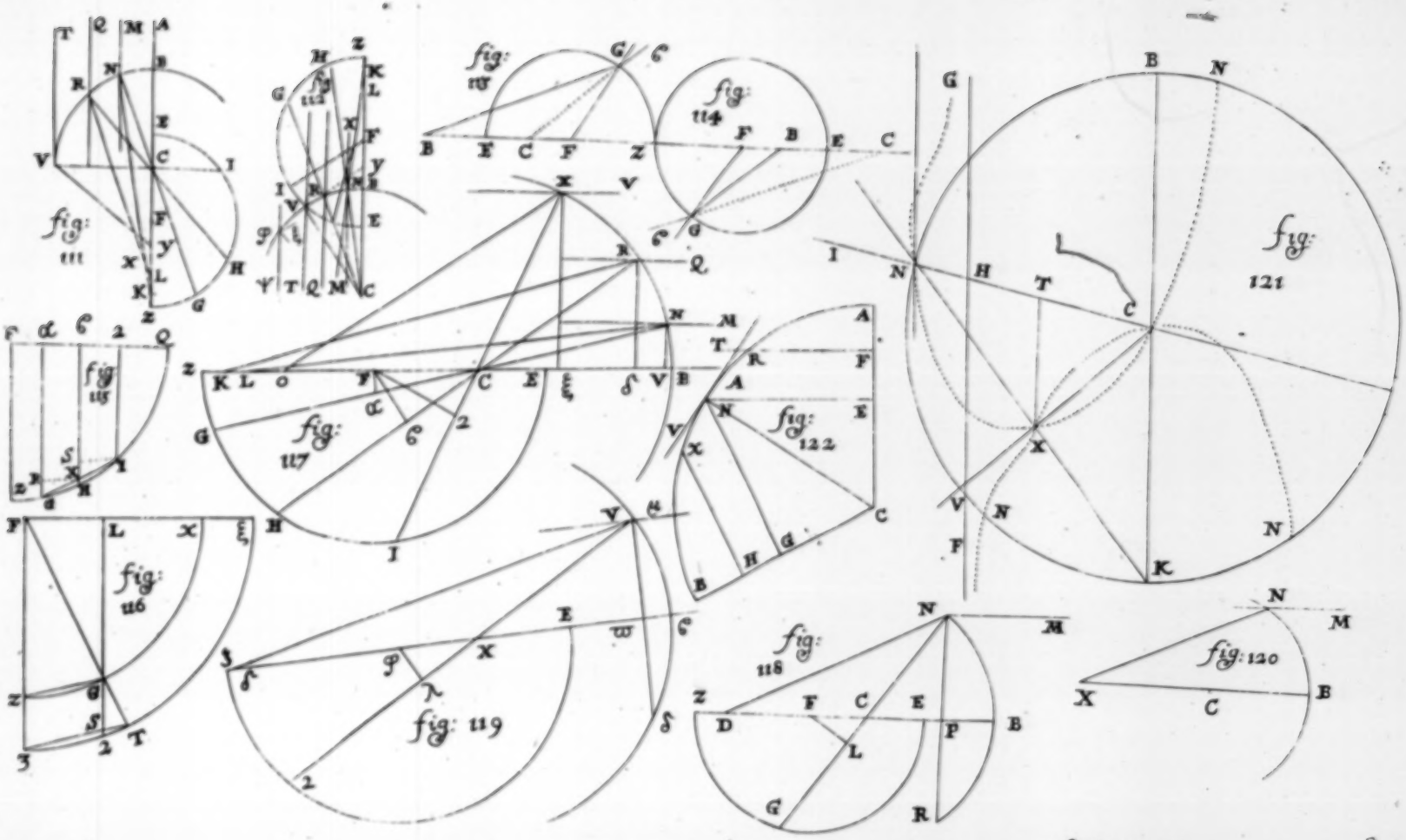


fig: 111
fig: 112
fig: 113
fig: 114
fig: 115
fig: 116
fig: 117
fig: 118
fig: 119
fig: 120
fig: 121
fig: 122

Opt pag 82

are $\frac{NR \pm \bullet\bullet}{2} = NX$; item est $\frac{NZ \pm Z\bullet}{2} = GZ$. erit ergò are Fig. 124.
NR.NX :: NZ . GZ. quapropter erit (juxta præcedentem)
NZ.GZ = NG.NE + CE.CG.

VIII. Porrò liquet punctum Z esse locum imaginis, quem expetimus, oculo conspicuæ in recta N• constituto; utpote circa quod viciniorum ipsi NP radiorum refracti ipsam N• intersecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura Καταλογῦν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmissum*, designatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, secans ipsam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti Fig. 125.
nempe per N, E, G, C circuli subtensæ GE insistentes ambos) æquari; hoc est angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG similia sunt, unde NG.NE :: ZV.ZG. itaque. CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG. verùm (ob refractionem) est NK.KC :: I.R :: CE.CG; hoc est NZ.ZV :: CE.CG. est igitur CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG; hoc est CE.CG + NG.NE = NZ.ZG. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox ostensis. adeò liquet propositum.

X. Quin subnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut sit NZ.ZK :: NGq.CGq. Etenim est NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq.

XI. Subjiciam & hoc è dictis consectarium *Theorema*:
Fiat $\checkmark 3Rq . \checkmark Iq - Rq :: CB . CQ$; ductâque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N, radii verò MN ad CB paralleli refractus sit NK, circuli peripheriæ denuò occur- Fig. 126.
rens in Z; dico punctum Z esse imaginem, qualem mox definivimus, oculo conspicuam in ipsa NK sito.
Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob $3Rq.Iq - Rq :: CNq.NEq$. hoc est $3CGq.CEq - CGq :: CNq.NEq$, erit dividendo $4CGq$

—CEq.CEq—CGq::CNq—NEq.NEq::CEq.NEq. quare permutando 4 CGq—CEq.CEq::CEq—CGq. NEq. (hoc est) ::NGq—NEq.NEq. ergò componendo 4CGq.CEq::NGq.NEq. & ideò 2CG.CE::NG. NE. quare 2.1 + CG.CE = NG.NE. vel 2.1 = NG. NE + CE.CG. hoc est NZ.GZ = NG.NE + CE.CG. unde liquet, è mox antedictis, propositum.

XII. Ex ista porrò constructione facilè colligitur, si fuerit 3Rq = Iq—Rq (hoc est si 2R = I) adeoque CQ = CB; quòd hujusmodi punctum Z non aliud erit ab ipso D; seu perpendiculari ipsi AB debitam imaginem ad punctum D consistere; eas verò quæ reliquis refractis conveniunt ejusmodi imagines intra circulum omnes, vel supra peripheriam extare. quinetiam si fuerit 2R ⊐ I, adeoque CB ⊐ CQ, patet nullius refracti imaginem in peripheria existere, sed omnes supra ipsam. Enim verò in his casibus omnes refracti axem AD supra punctum D intersecant. verùm si fuerit 2R ⊏ I (utique sicut reverà quoad pleraſque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias usu venit) utì reipsâ datur ejusmodi punctum Z, in perepheria TD alicubi situm, ità facilè poterit isto modo determinari.

XIII. Observetur porrò sic definitum punctum Z circuli partem à D versus T per radios quadranti BT incidentes illustratam terminare. Omnes enim ipso MN obliquiùs incidentium refracti ipsam NZ supra Z versus G decussabunt; adeóque ad partes ZD circulo impingent; item omnium ipso MN rectiorum refracti ipsam NZ infra Z versus K intersecabunt; & hinc etiam in arcum ZD cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Slusio* monitum amicus mihi communicavit) potuisse *Cartesium* sine tabularum confectione suum *Iridis* angulum determinare. nam assumpto arcu DY=DZ; angulum istum arcus ZY metitur; posito circulum propositum per aquei globi centrum transire. quod ità facilè constat. Radii cujusvis diametro BC paralleli MN refractus NZK reflectatur in ZFH; & ZF in FO refringatur; sitque FL ad BD parallela; sumatur etiam DY=DZ; & connectantur CZ, CY; dico angulum LFO æquari angulo ZCY. Nam imprimis ob ZN, ZF æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum OFH angulo PNZ vel CKZ æquari. igitur ang.HFL—HFO = ang FIC—CKZ = ang KIZ

KIZ — CKZ = ang NZI — 2 ang CKZ = 2 ang NZC — 2 ang CKZ = 2 ang. ZCD = ZCY. est igitur ang. OFL = ang ZCY. Cùm itaque sit in superiore Hypothesi punctum Z umbræ lucisque confinium, manifestè liquet propositum.

XV. Subnotetur autem, si medium inflectens sit aqueum, arcum ZY esse partem circuli totam (posticam scilicet) illuminatam; tangentis enim ST refractus, puta TV, nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. ast in densioribus mediis, velut in vitro, secùs accidere potest; siquidem in eo tangentis refractus, puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto designatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY amplior evadit, tangentium quippe refractis circumscripta. Viderit igitur excellentissimus vir, an universim constet (id quod ipse nisi fallor innuere videbatur) ex observata partis illuminatæ quantitate, *Iridu angulum, etiam juxta Cartesianas Hypotheses, rectè determinari*. Nam sumendo arcum DR = DX, ad punctum quidem R pertinget illustratio; neque tamen ulla lux quadranti BT incidens a parte ZR (sed illa tantùm quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes sitos, hoc est quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque disterminat. Fig. 128.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici possit, illa fortè verisimilior, quam ipse *Cartesius* assignavit. quid enim si dixero peripheriæ ZV impingentem lucem, & versus O inflexam magis apparere; primò, quia spissior est, ac à radiorum geminâ diffusione constat, ab utraque puncti N parte in arcum ZV refractorum; tum secundò, quoniam obliquius ipsi ZV incidit, adeóque facilius & copiosius indè quam aliunde versus partes O retorquetur? Et cum præsertim circa punctum Z acutiùs radii coeant, neque non incurrant obliquiùs; quidni propterea vividior exindè resultet apparentia? Verùm hæc παρεξβασεις. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid si de illis (etsi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* est quod lucem copiosam, paritèr ubique spissam, circumfundit. Talia fermè sunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præsertim, quæ multas superficieculas, in omne latus obversas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida semper alba videntur;

Quia

Quia corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit; Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli, Folia, Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore constricta accenseri possent.

Nigrum est, quod lucem minimè, vel parcissimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua, Vitrum, Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, calefiunt, comburuntur; Quòd longiùs dissita (quorum sensim intercipitur, & amittitur lux) obscuriora videntur.

e Lat. Fig. 128. *Rubrum est*, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac solito magis constipatam, ast interstitiis umbrosis diremptam, & interruptam. talia concipi possunt corpora, multas intra se quasi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Spharulis*, transmissam lucem ad totidem *focos* cogentibus, constans). Argumento sit, Quòd à *Speculis*, & *vitris ustoriis* collecta lux rubescit; Quòd corpora densa ignita (quippe quorum cellæ luce spissâ referciuntur) rubra videntur; Quòd roscida nubes Soli (matutino, vel vespertino) exposita rubet; Quòd erosio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasse pertinet, quòd compressa lux languidiùs emicat.

Cæruleum est quod lucem raram, aut impetu segniore concitatam emittit. talia Videntur esse corpora, quæ particulis constant albis ac atris alternatim dispositis; sed & hunc subinde colorem ostentant candida maligniùs illustrata. Exemplo sint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, sale candido nimirum & humore pellucido constans; Umbra corporis cujusvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta seu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

è Lat. Fig. 128. *Viride* cæruleo perquàm agnatum est. *Discrimen* explorent sagaciores; ego non ausim ariolari.

Cæterùm reliqua colorata ex istis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioso, rubrique nonnihillo intersperso; *purpureum* ex multo cæruleo, rubrique tantillo, &c. Verùm sufficiat hâctenus, ista supra captum nostrum posita Scrutantes; nos illis, qui ἀιτιολογίας *Physicas* morosiùs excipiunt, deridendos propinasse.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum est; ast interpositâ morâ, nè vix exorsi cogamur abrumpere. ||

Lect.

LECT. XIII.

I. *TRansactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quam ad circuli peripheriam subeunt radii sibimet paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui à puncto quopiam sensibiliter divergentes itidem circulo se objiciunt refringendos.* cum autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietus è pluribus causis oriunda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magis aut minùs à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ità rem, quâ possumus, moderari, simul ut cùm ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquousque devitentur. id autem non aliàs, opinor, commodiùs assequemur quàm imprimis generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi I ⊏ R, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut satis facilè possint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando. ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum) I.R::NK.NH=NK.NA+NA.NH=NK.NA+AC.CK: Q.E.D. Fig. 129. 3 Lect. num. 9.

III. Hinc si fuerit CA.CR :: I.R. erit CK.CR::NK.NA.

Nam

Nam erit tum CA.CR = CA.CK + NK.NA. unde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit CK.CA + CA.CR = CA.CK + CK.CA + NK.NA. hoc est CK.CR :: NK.NA.

Fig. 130, 131. Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo CA.CR :: I.R. quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

IV. Hinc consectatur; primò; Si fuerit AN ⊏ CR, quòd refractus N« cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit CK.AN ⊐ CK.CR :: NK.AN. adeóque CK ⊐ NK. Fig. 129.

V. Secundò; si fuerit AN = CR, refractus N« ad AC parallelus erit. Fig. 130.

Nam sit NH ad AC parallela. quum itaque sit CA.AN :: (CA.CR ::) I.R; erit AN ipsius HN refractus. ergò vicissim NH ipsius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò; Si fuerit AN ⊐ CR, refractus N« cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc CK.AN ⊏ CK.CR :: NK.AN. ac indè CK ⊏ NK.

VII. Hinc clarum est; Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos versus AC procurrentes convergere. erit enim tunc semper AN ⊏ CR.

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem AB = CR; axi propiores radios in sensibilem parallelissimum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit AT ⊐ CR; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere. tunc enim semper est AN ⊐ CR.

X. Clarum est quoque, si AN = CR, omnes arcui BN incidentium refractos retro productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe I ⊐ R; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si

1. Si fuerit AN ⊏ CR, refractus Nα cum AC retrò tractus conveniet. Fig. 132.

Nam CK ⊐ NK. (ut in priore casu).

2. Etiam hic si AN = CR, refractus Nα sit ipsi AC parallelus.

Nam erit CK = NK. quod in hoc casu nisi K infinitè distet contingere nequit.

3. Si AN ⊐ CR; refractus Nα prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hic CK ⊏ NK.

4. Si AB ⊐ CR; omnes refracti directè progredientes ad AC convergunt. Erit enim quivis incidens AN ⊐ CR. Fig. 133.

5. Quum AN = CR, evidens est omnes arcui BN incidentes retrorsum versus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorsum versus CB refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi; nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simpliciùs sese rem habere, scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratiori impungunt, id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequatur, & è simplice secundum illas linearum ductu diluceſcit. His admonitis in orbitam regressi pergimus. Fig. 134, 135, 136.

XIII. E præmisso Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

*Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut sit KG. AG :: CK. CR. item fiat GF. FA :: CK. CR (:: KG. AG). tum centro F, intervallo FG describatur circulus refringentem intersecans ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus. *Lib. 10. Num. 25. Fig. 137.

Nam ducatur FN, & ob KG. AG :: GF. FA. erit permutatim KG. GF :: AG. FA. dividendóque KF. GF :: GF. FA. hoc est KF. FN :: FN. FA. quare triangula KFN, NFA

assimilantur. unde NK.KF:: AN.NF. seu permutando NK. AN::KF.NF. erat autem priùs KF.NF::GF.FA::CK. CR. est igitur NK.AN::CK.CR. unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

Fig. 137.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facilè *Corollaria* deducetis:

1. Si circulus GNH *refringentem* contingat ad H; ipsius AH (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipsius K partes (ultra nempe vel citra K respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius A positione resultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* constructionem respuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus GNH *refringenti* coincidat (id quod facilè concipi potest, & in aliquo reverà casu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia constructionem istam consectantur solerter expansem, quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs ostendi; velut hoc imprimis palmarium.

XV. Si fuerit AB.CR::BZ.CZ; dico punctum Z esse limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim intersecat; seu perpendicularis ipsius AB refractum in Z terminari.

Nam cujusvis incidentis AN refractus axi occurrat in K, erit ideò CK.CR::NK.NA. ergò quum sit CR.CZ::AB.BZ; erit CK.CR + CR.CZ = NK.NA + AB.BZ.

Fig. 138.

1. Est autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K sunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) BK ⊏ NK, & AB ⊐ AN; adeóque BK.AB ⊏ NK.NA. ergò CK.CR + CR.CZ ⊐ BK.AB + AB.BZ. hoc est CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel inversè permutando BK.CK ⊏ BZ.CZ. dividendóque BC.CK ⊏ BC.CZ. ergò CK ⊐ CZ; adeóque punctum K supra Z existit, versus centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139.

2. In secundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras supra punctum A partes à centro aversas cadunt) connectatur subtensa BN, & ducatur AS ad KN parallela; hæc secabit angulum BAN, majorem ipso BKN, vel BAS; & cùm angulus ABN sit obtusus, erit AN ⊏ AS. adeóque KN.AN ⊐ KN.AS::KB.AB. erit etiam hîc igitur (ut supra) CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel permutatim CK.BK

⊐

$\supset CZ.BZ$. dividendóque $CB.BK \supset CB.BZ$. adeóque $BK \sqsubset BZ$, hoc eſt punctum K magìs quàm Z à centro elongatur.

3. Haud diſſimilis in aliis caſibus erit *Demonſtratio*; ut in hoc, ubi $I \supset R$, ad convexas; eſt enim hìc (ut in præcedente) $KB.AB \supset KN.AN$. adeóque (ſupra monſtratis inſiſtendo) $CK.CZ \sqsubset KB.BZ$. vel permutando $CK.KB \sqsubset CZ.BZ$. dividendóque $CB.KB \sqsubset CB.BZ$. unde $KB \supset BZ$. adeóque punctum K centro ſemper vicinius eſt quàm Z. Fig. 140.

XVI. Hæc autem cùm, modo ſuo mutatis mutandis, ad omnes caſus transferri poſſint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc eſt apparentia radiantium punctorum A loca, reſpectu oculi centrum habentis in axe AC ſitum; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hìc in duobus caſibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit obſervandum cùm ſit $CB = CR$, omnes refractos in ipſo puncto Z (ut ſuprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob $AB.BC :: AB.CR :: BZ.CZ$. erit dividendo $AC.BC :: BC.CZ$. quapropter ad punctum quodvis N adſumptum connexis AN, ZN, erit $ZN.AN :: (CZ.CN ::) CZ.CR$. unde ZN refractus erit incidentis AN. Fig. 141.

XVIII. Hinc etiam ſi fuerit $AB = CR$, conſequetur punctum Z à centro infinitè diſtare; quia nempe tum ob $AB.CR :: BZ.CZ$, erit $BZ = CZ$; id quod fieri nequit, niſi punctum Z ità elongetur infinitè. Fig. 141.

XIX. *Conſectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites ſint puncta Z, ζ, erit $AC.AB + BZ.CZ = \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta$. Fig. 142, 143.

Nam è præmiſſis facilè conſtat eſſe

$$\left.\begin{array}{l} \text{tam } AC.AB + BZ.CZ = \\ \text{quam } \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta = \end{array}\right\} I.R.$$

XX. Unde $C\zeta \sqsubset CZ$. Nam ob $BC.AB \supset BC.\alpha B$. componendóque $AC.AB \supset \alpha C.\alpha B$. erit $BZ.CZ \sqsubset B\zeta.C\zeta$. dividendóque $BC.CZ \sqsubset BC.C\zeta$. adeóque $C\zeta \sqsubset CZ$.

Fig. 144. XXI. Imò universim si radii quivis AF, αφ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hisque conveniant refracti FL, φλ, erit Cλ ⊏ CL. id quod hoc modo non inelegantèr ostenditur. Ducatur recta BX cum BC angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; perque puncta F, φ; & centrum C transeuntes rectæ ipsi BX occurant punctis P, ω. tum quoniam triangula FCL, BCP æquiangula sunt (angulus enim CBP angulo CFL ex constructione par est, & ang. BCP verticali suo FCL æquatur) nec non latus CB lateri CF æquatur, erit CP = CL. Simili planè discursu est Cω = Cλ. Porrò, quia Cφ ad Cα (hoc est Sinus anguli Cαφ ad Sinum anguli Cφα) majorem rationem habet, quàm CF ad CA (hoc est quàm Sinus anguli CAF ad Sinum anguli AFC, vel æqualis anguli Cφα) liquet angulum Cαφ majorem esse angulo CAF, adeóque reliquum αCφ minorem esse reliquo ACF; vel angulum PCB angulo ωCB. unde liquet esse Cω majorem quàm CP; hoc est Cλ majorem esse quàm CL: Quod E.D.

Coroll. Vides arcum BF majorem esse arcu Bφ.

Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ BX promptissimè designari. sed hæc an πρότερα fuerint nescio.

Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentium radiorum AM, AN (quorum AN sit obliquior) refracti MK, NL axem ad easdem partes, directè pergentes, secent, iste ad K, hic ad L; dico fore CK majorem quàm CL.

Nam connexis CN, KN; & ductâ LH ad KN parallelâ; quoniam, è præmissis, est CK. CR :: MK. MA. & CR. CL :: NA. NL. erit CK. CK + CR. CL = MK. MA + NA. NL. est autem NK. NA ⊐ MK. MA (quia NK ⊐ MK, & NA ⊏ MA) ergo CK. CR + CR. CL ⊏ NK. NA + NA. NL. hoc est CK. CL ⊏ NK. NL. hoc est NK. HL. ⊏ NK. NL. quapropter est LH ⊐ NL. est autem angulus LCN obtusus, ergo recta LH angulum CLN secat, ac angulus LHC interno LNC major est; hoc est angulus KNC angulo LNC major est. unde liquidò patet fore CK ⊏ CL.

Coroll. CK. CL = MK. MA + NA. NL.

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipsos priùs quàm axem intersecant, velut ad X. || Hoc speciminis loco pro casu, qui præ manibus.

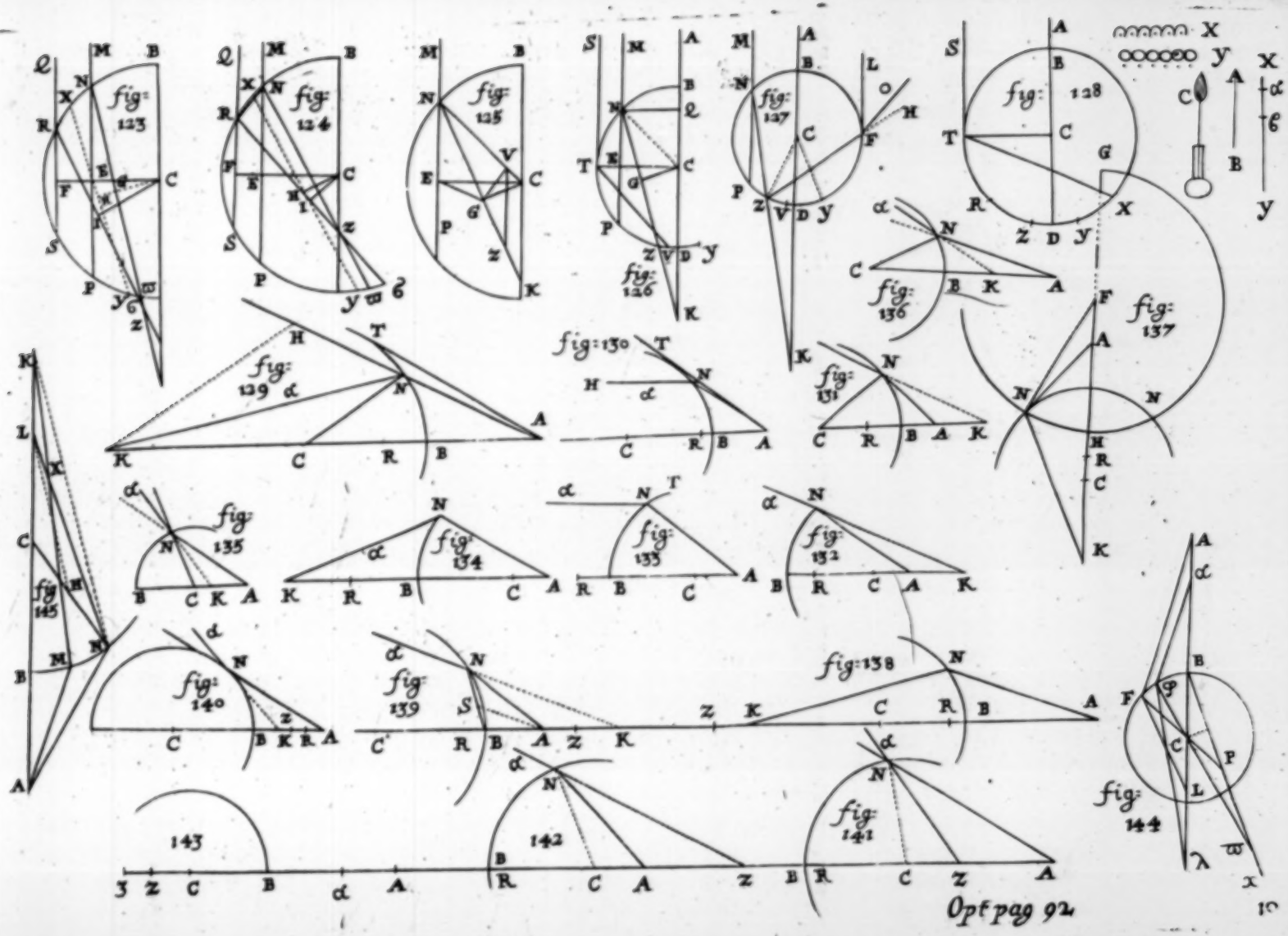


fig: 123
fig: 124
fig: 125
fig: 126
fig: 127
fig: 128
fig: 129
fig: 130
fig: 131
fig: 132
fig: 133
fig: 134
fig: 135
fig: 136
fig: 137
fig: 138
fig: 139
fig: 140
fig: 141
fig: 142
143
fig: 144
fig: 145

Opt pag 92

manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatissimum Problema* (cujúsque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximorum concipiantur refracti N∘, R∘ sese puncto Z decussantes; bisecentúrque subtensæ NP, N∘ punctis E, G; (à rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc est I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad R∘ perpendiculares, in que productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI; & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad N∘ parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm \text{arc. } NR}{2}$. arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc NR. item est NZ. Z∘ :: arc NR. arc ∘∘. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm Z\circ}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \pm \circ\circ}{2}$. *hoc est NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN + NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I.R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit ostendere. *Lib. 9. Num. 11. *11 Lib. Num. 6.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M. unde.

unde Problematis conſtructio, ſeu puncti Z dererminatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipſo, concinneque demonſtratam) conſtructionem: Duc NR incidenti AN perpendicularem, & ſecantem axin in R. Fac NP. N∽ :: NR. T. duc NQ refracto NK perpendicularem, & æqualem ipſi T; denique jungatur QC, hæc producta ſecabit NK in foco quæſito Z.

XXVII. Hujuſmodi verò punctum Z eſſe locum ipſiſſimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipſa N∽ conſtituto, ſæpius expoſitæ rationes manifeſtant.

*In Num. 25. XXVIII. Attendenti porrò conſtabit, ſiquidem fuerit *NG ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo diſtabit; ſeu proximi radio N∽ refracti ipſi N∽ paralleli erunt; ſin ratio NG ad M ſit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z exiſtet infra G, vel in NG antrorſum protracta; verùm denuò ſi NG ⊐ M, quod punctum Z ſupra N, vel in NG retrò tractâ verſatur. Hæc ſuffecerit innuiſſe. Hinc etiam poſticæ circuli partis illuminatæ quantitas uteunque poſſit determinari. ſed ad locum Solidum res ſpectat, ipsámque proinde miſſam facio.

Fig. 148. XXIX. Inferemus autem hîc *Phænomeni* cujuſdam ſatis obvii, quódque nonnullis forſan *(utpote communibus Optica decretis apparenter adverſum)* mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè diſtantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem MBN (ab axe AB biſectum) imago, ſeu focus Z; & per Z, ad ipſam AZ perpendicularis traducta concipiatur linea XY. porrò, deſumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum verſus) jacere; ductis itaque rectis EM, EN, harum refracti adhuc altiùs ſe interſecant, puta ad K; productæque MK, NK lineam XY ſecent punctis O, P. quinetiam ulterius accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum FM, FN refracti ſint ML, NL; lineæ XY occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifeſtum eſt intervallum RS ipſo OP majus eſſe. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & ſtellæ fixæ) quæ propter exiguitatem ſuam apparentem punctorum ad inſtar haberi poſſunt) quò a diſtinctæ viſionis loco longiùs amovetur, eò (contra quàm in aliis viſibi-

visibilibus obvenit) majus apparet. Nam si arcus M N B oculi superficiem repræsentet, *(pupilli amplitudini respondentem)* linea X Y fundum oculi, A locum distinctæ visionis; ejusmodi lucens ad A positum satis angustum circa Z spatium illustrabit; ad E verò constitutum, validè radios vibrans, totum coruscatione sui spatium O P afficiet; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum R S percellet, indéque grandiorem sui speciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter se habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam sui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eo lubentius hanc, adeò perspicuam, hujusmodi *Phænomenon* assignamus rationem, quoniam in eorum reddendis causis ità titubat magnus ille *Galilæus*, nescio quos, ex refractionibus, relectionibúsve quibusdam commentitiis oriundos, alcititios suggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam simplicem circularem claudamus*, quam utcunque quàm pauciſſimis ità complexi sumus, ut præcipua saltem (quæ videbantur) & notatu digniora perstrinxerimus. priùs autem *Catoptricam circularem*; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum instituto nostro visum est congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propositum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præsertim sectiones, haud dissimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum satis supérque commoratus sim; & præter ea quæ circa conicas sectiones à nobis pridem insinuata sunt (quæ & ab aliis luculentè tractata prostant) reliqua non ità magnum usum spondeant; contentus hasce primarias, in usu maximè positas, & usui præsertim accommodatas superficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum scirem, excussisse; cæteras omninò missas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones istas, quos pluribus successivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque constitutis aut compositis, incidentes subeunt radii; quæ conveniunt illis Symptomata, possunt ea de præmissis elici; quorum certè præcipuum est, quod apparentis puncti locum respicit ab inflectionibus ad istas superficies factis resultantem; in hoc enim indagando, determinandóque potissimùm hæ disquisitiones versantur; Hunc igitur saltem definitum exhibebimus, idque satis commodè, ex uno quodam Theoremate, seu regula generali; cui exempla quædam, communis usûs in gratiam selecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præsertim comparata, subjungemus. Ista verò, nè jam tædio Sinus, sequenti reservamus. Lect.

Lect. XIV.

I. *Sub prædictis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis ſtipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus reſultantes, imagines dignoſcantur. illam nunc exhibemus quàm ſimpliciſſimè conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A ſpeciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut ſecùs diſpoſitis) conſtans; tum puncti A reſpectu oculi in recta B E poſiti, & ex inflectione ad ſuperficiem B reſultans (è præmiſſis utique deſignabilis) imago ſit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) reſpectu oculi in recta E F conſtituti, & ab inflectione ad ſuperficiem E emergens imago ſit Y, demùm puncti Y (tanquam in ſuperficiem F radiantis) reſpectu oculi in F O collocati ſit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque ſecùs quotcunque fuerint inflectiones ſeſe res habebit; enimverò ſemper ex illa tali poſtrema inflectione reſultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è conſtructione ſatis apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipſi A B ineidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipſum F X interſecare. vel ità rem collegeris: punctum Z eſt puncti A imago; & punctum Y ipſius Z; denuóque punctum X ipſius Y; itaque punctum X ipſius A imago erit, qualem nempe res hic fert, remota. Strictiore longiuſculo diſcurſu poſſet hoc comprobari, ſed quorſum rem ſatis claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, ſeu è præmiſſis deducta conſectaria ſubnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis proponuntur deſignandæ, oculum reſpicere Centrum habentem in ipſo radiationis axe (qualis eſt recta B D) conſtitutum. item diverſarum ſuperficierum ac radiationum axes ſibimet in directum poni. præſumatur etiam in refractionibus ex ære factis ad vitrum fore I. R :: 5. 3; ad aquam verò fore I. R :: 4. 3. (hæ nempe rationes veris probè congruæ

depre-

deprehenduntur) : addo, confusionis evitandæ causâ symbolum *I* dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuo densius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appositis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum posterioris; & B verticem anterioris, D verticem posterioris; denuo designat Y locum imaginis quæsitam.

Hisce præmonitis, primum de longinquo radiantium, seu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, sic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat $I - R . R :: DK . DY$.
In Vitro est $DY = \frac{1}{2} KD$.
In Aqua est $DY = 3 KD$.

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ, \text{ \& } \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$
In Vitro $DY = \frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} BD$.
In Aqua $DY = 3 BC - \frac{1}{4} BD$.

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ, \text{ \& } \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*
Fiat $2I - 2R . I :: CD . CY$.

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo-convexam.*

Fiat $I - R . I :: BC . BZ$, &

Fig. 152, 153. 1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & sit insuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R}KZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R}KZ$, imago Y infinitè distabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R}KZ$; fiat $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY ad partes lentis adversas ipsi K.

De sensibiliter autem propinqua distantia radiantium seu divergentes radios emittentium punctorum (qualia semper designat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejusmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155. I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ, \text{ \& } \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$

Brevius. Fiat $I . I - R :: BD . AY$.

Fig. 156. III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano concavam converg.*

Fiat $R . I :: AB . BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, si $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis adversus A.

2. Si $\frac{I}{R}KZ = DZ$; imago distabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Cùm

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versùs A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ ; \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè distabit.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$, deprehendentur Z, & Y versùs A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK . DY$; puncta Z, Y adversus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape DY adversus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; fac $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & sume BZ versus A'. Jam cùm Z cadit extra DK, si primò sit $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY adversus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago distabit infini è.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; sumatúrque DY versus A.

Corol. Ad integram Sphæram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape CY adversus A.

2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$; imago in infinitum abit.

3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I} AC$; fiat $\frac{2R}{I} AC - AC - AB . AC :: BC . CY$; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

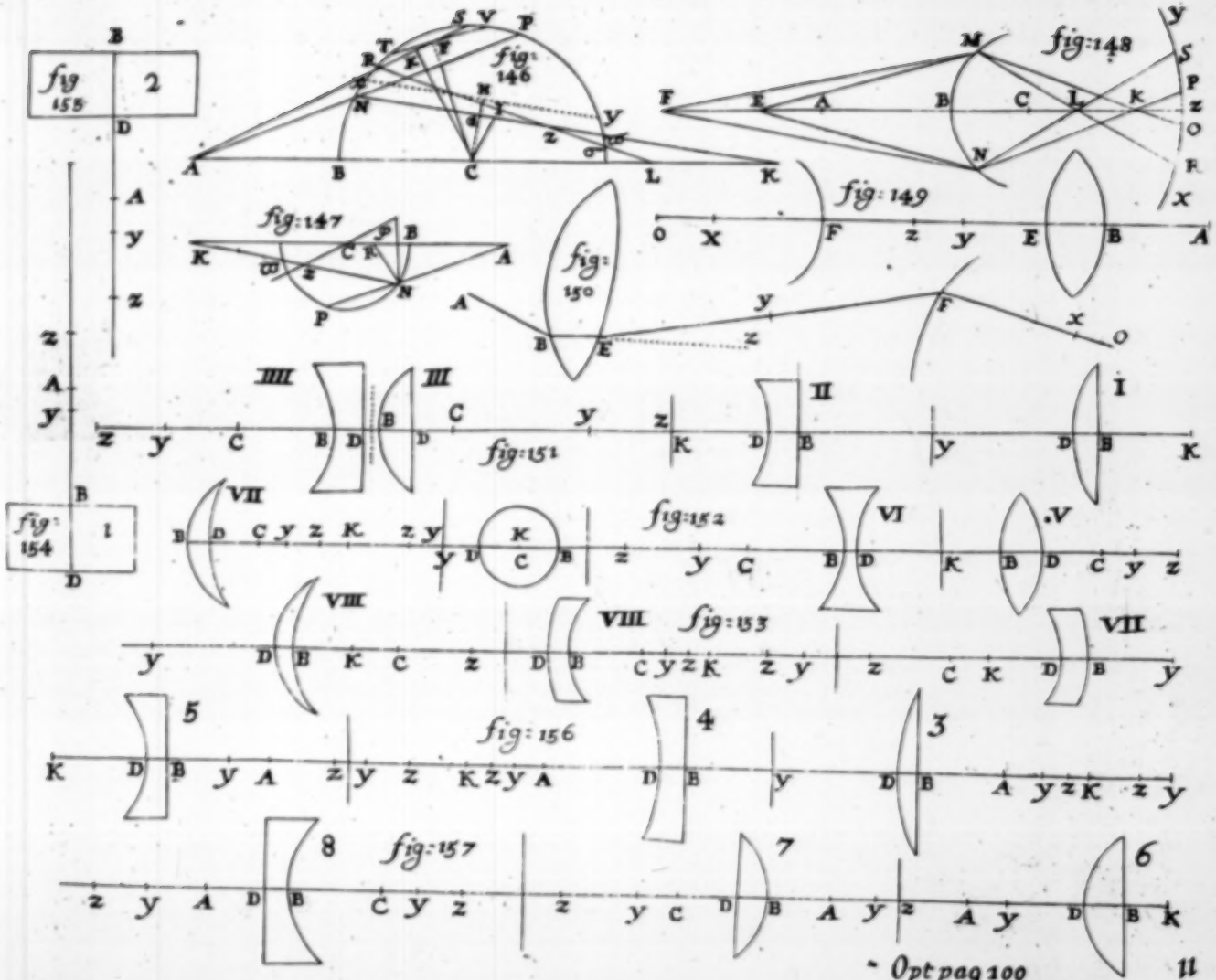


fig 155
fig: 146
fig: 147
fig: 148
fig: 149
fig: 150
fig: 151
fig: 152
fig: 153
fig: 154
fig: 156
fig: 157

Opt pag 100

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I}AC$. AB :: BC. BZ; ſin A cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I}AC$. AB :: BC. BZ; deinde fac $\frac{I}{R}KZ - DZ$. DZ :: DK. DY. Fig. 159.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra BC ponatur, fiat $AB + \frac{I-2R}{I}AC$ :: BC. CY. ſin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R-I}{I}AC$. AC :: BC. CY; & cape CY ad partes centri verſus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si $AB \rightharpoondown \frac{R}{I}AC$, puncta Z, & Y verſus A cadunt, facto $\frac{R}{I}AC - AB$. AB :: BC. BZ; & $\frac{I}{R}KZ - DZ$. DZ :: DK. DY.

2. Si $AB = \frac{R}{I}AC$; fac I — R. R :: DK. DY; & cape DY verſus A.

3. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I}AC$; fac $AB - \frac{R}{I}AC$. AB :: BC. BZ; & cape BZ adverſus A. Jam quum Z cadit extra DK, tum primò ſi $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R}KZ - DZ$. DZ :: DK. DY; & cape DY verſus A.

4. Secundò, ſi $\frac{I}{R}KZ = DZ$, imago infinitè diſtabit.

5. Tertiò, ſi $\frac{I}{R}KZ \rightharpoondown DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ$. DZ :: DK. DY, & ſume DY adverſus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R}KZ$. DZ :: DK. DY; & ſumatur DY adverſus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160, 161, 162.

XVII. *Ad lentem concavo-convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; ſin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra DK, tum primò ſi $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY adverſus A.

2. Secundò, ſi $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, ſi $\frac{I}{R} KZ \multimap DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & ſume DY verſus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur DY verſus A.

Hiſce ſubnectam ſequentia; non contemnendum in *Engyſcopicis* uſum præ ſe ferentia *Problemata*.

Fig. 163.

I. *Dati punctli propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in alind datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ reſultat ex omnibus, quos ipſum A diffundit, radiis in ipſa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur ZB in C, ut ſit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C deſcribatur circulus EBF. item centro Z intervallo quovis ZD (majori quam ZB) deſcribatur circulus GDH; factum erit; nempe lens EFGH punctli A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB puncta A, Z è propoſitis facilè determinari.

In vitro, ſi CB = 15, erit $\left\{\begin{matrix} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{matrix}\right\}$ & $\left\{\begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix}\right.$

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A refringi.

Hujuſmodi

Hujuſmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità conſtruatur: ſit Z D diſtantia, ad quam optimè cernunt; ſumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{2}{3}ZB$; tum centro C per B deſcribatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H deſcribatur; ipſi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A diſtinctè ſpectabunt, velut ad Z ſitum.

Quòd ſi velit *Myops*, ad diſtantiam itidem Z D diſtinctè cernens, aſſignatum punctum A contemplari; adſumpto, ut prius, libere puncto B, fiat $CB = \frac{2AB \times ZB}{5AB - 3ZB}$; & reliqua fiant, ut prius.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum aliud punctum Z longiùs projicere.* Fig. 164.

Fiat A Z . A D :: I — R . R . item dividatur A D in C, ut ſit C D . C A :: I . R; & centro C per D deſcribatur circulus E D F . item centro A, quopiam intervallo A B (minori quàm A D) deſcribatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z viciſſim è propoſitis innoteſcunt.

In vitro, ſi C B = 15, erit $\left\{\begin{matrix} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{matrix}\right\}$ & $\left\{\begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix}\right\}$

Itidem & hic, per lentem E F verſus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi diſtinctè videant. Secetur Z D in A, ut ſit $AD = \frac{1}{3}ZD$. item ſit $CD = \frac{1}{2}AD$ (vel ſit $CD = \frac{1}{3}ZD$) centroque C per D deſcribatur circulus E D F . item utcunque ſumpto puncto B (citra D nempe, verſus A) centro A per B deſcribatur circulus E B F . lente E F dicti *Presbyta* punctum A diſtinctiſſimè conſpicient. ||

Hiſce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuſcunque caſûs imaginem Geometricè deſignandi; ut & lentem deſcribendi, qua imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem deſignare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem conſtituentium eriguntur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I ſecans B P, & C I in P, & I. fac C I . C R :: I . R . agatur recta R P ſecans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac K ϱ . K j :: R . I; & agatur 1 Q, quæ producta ſecabit axin in Y, loco imaginis quæſito || Fig. 165, 166, 167.

2. *Re-*

Fig. 163.

2. *Reliquis datis, lentem describere.*

Sumantur ad arbitrium B Y distantia lentis ab imagine, B D crassities lentis, & alter circulorum lentem constituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum sit C; & ad ista puncta B, D, C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I secans B P, & C I in P, & I. fiat C I. C K :: I. R; & agatur R P secans D Q in Q, fiat D Q. D S :: I. R; & agatur S Y secans R P productam in γ; à quo demittatur perpendicularis γ K; & centro K intervallo D K describatur circulus E D F; erit E B F D lens quæsita.

Hic autem in nimium excrescenti spatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

BEne longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ visum afficiunt, instituto stadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodocunque prosecuti, quæ παρεμπίπτα nobis visa, nec adeò pervulgata se objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantùm radiantibus agentes omnino videamur omisisse) quales nimirum illæ ex hujusmodi radiorum inflectionibus quoad situm, figuram, quantitatem mutationes subeunt, id fermè totum passim atque fusiùs tractatum prostat, nec animus est mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò spectantia pleraque cuncta de jam definitis ac ostensis haud difficili negotio colligi posse videntur; singulorum nempe cujusvis objecti punctorum (extremorum præsertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad subsequentem quoque regulam (seu monitiunculam) pressiùs animum advertentes forsan autumabitis. Si qualem assignata quævis superficies inflectens (simplex aut composita) magnitudinis cujusvis expositæ speciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inversam, confusam distinctámve, seu quovis alio modo demutatam) internoscere cupiatis,

id

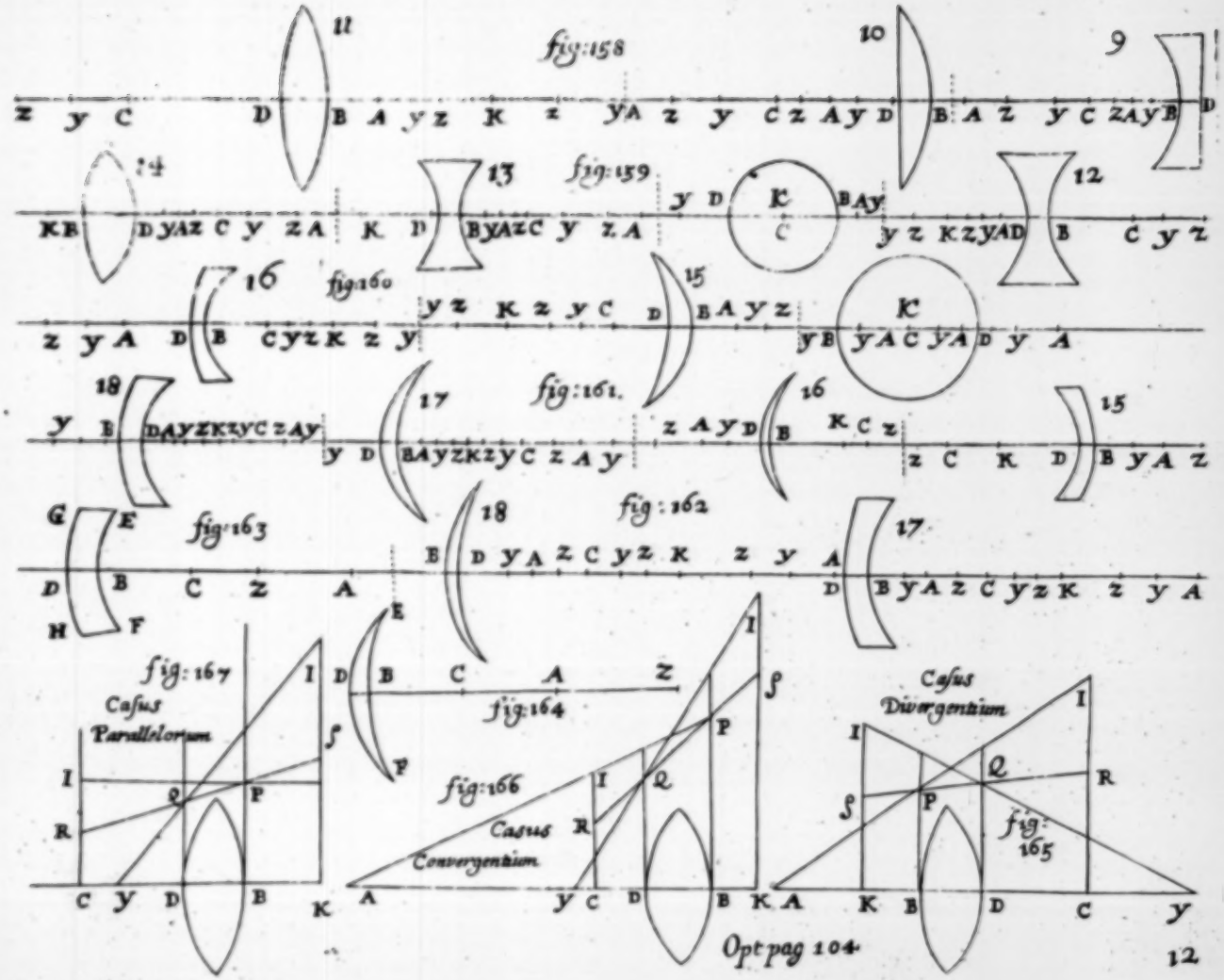


fig:158
fig:159
fig:160
fig:161.
fig:162
fig:163
fig:164
fig:165
fig:166
fig:167
Casus Parallelorum
Casus Convergentium
Casus Divergentium

Opt pag 104

id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari paſſim ſupponitur, ei ſaltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu conſtitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propoſitam ſuperficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas ſpecialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè ſpecies inter duos primos ab oculi centro procedentes radios conſiſtet, quæ cum ipſo (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correſpondentium poſitionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, ſi extremorum ac mediorum præſertim objecti punctorum juſtas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis inveſtigare. ab appoſitis exemplis res manifeſtior evadet; in quibus notetur punctum O ſemper oculi centrum, rectam OBA radiationis axem (ſuperficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis denſioris (aquæ ſi placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta MN repræſentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii OM, ON; qui in MF, NG refringantur, inter hos jam deſignetur objectum FAG (ab axe OA biſectum) hujus è medio FGMN ſpectati ſpecies (vel apparentia) alicubi conſiſtet inter rectas OM, ON, veluti puta ad φαγ. cùm autem (ut ex hujuſce ſuperficiei natura, communique refractionum lege palàm eſt) ſit angulus φOγ major angulo FOG; hæc objecti ſpeciem amplificat inflectio. item cum puncta (ſibi reſpondentia) F, φ; & G, γ ad eaſdem reſpectivè partes jaceant, ab eadem objecti poſito non immutatur. quòd ſi punctorum φ, α, γ poſitio juxta ſuperiorem doctrinam ſtrictiùs exquiratur, de totius imaginis φαγ figurâ diſtantiâque ſatis accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus denſum* PMNQ, *Superficiebus planis parallelis* (MN, PQ) *comprehenſum*, & ab oculi centro O prodeuntes radii OM, ON ad ſuperficiem MN refringantur in MP, NQ; horum verò ad Superficiem PQ refracti ſint PF, QG (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipſis OM, ON æquidiſtabunt) inter PF, QG ſtatuatur objectum FAG, cujus ſit imago φαγ; tum verò manifeſtum eſt hìc ſe rem ſimiliter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus ſpecularis concavus* MBN, & radiorum OM, ON reflexi ſint MF, NG (ſe decuſſantes in H, & cum ipſis OM, ON concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum FAG; ejus itidem imago rectis OM, ON interjacebit, puta ad φαγ. comparando jam angulos apparentes FOG, φOγ, clarè vides objecti FAG ſpeciem imminui. item cernis puncta ſibi reſpondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, ſeu objecti ſitum hinc inverti. Quod ſi intra angulum & ſpatium XHY ſtatui concipiatur objectum, clarum eſt hinc ejus quidem ſpeciem ampliari, ſed adhuc ſitum inverti. ſin inter ipſa XY conſiſtat objectum, ejus itidem invertetur ſitus, at quantitas non immutabitur. demùm ſi intra angulum NHM conſtituatur objectum, puta RLS; cujus imago ſit ϱλσ; evidens eſt hujuſce ſpeciem creſcere, ſitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* MBN, factiſque ſimiliter ac in eo quod immediatè præceſſit omnibus; nè plura prodigam verba, vides objecti FAG ſpeciem (φαγ) coarctari, ſed ejuſce poſitionem eandem perſiſtere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* MBNQP. Radii OM, ON ad ſuperficiem MBN refringantur in MP, NQ; tum ipſi MP, NQ ad ſuperficiem PQ refringantur in ipſos PF, QG (ſeſe decuſſantes in H, & cum ipſis OM, ON concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, ſi objectum FAG infra XY (verſus H) ſtatuatur, ipſum ab imagine φαγ majus, quàm obtutu ſimplice, repræſentari. Quod ſi inter ipſa puncta X, Y ſubintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at ſi ſupra XY ſtatuatur objectum RLS, ejus ſpecies, ad ϱλσ conſpicua, diminuetur; ubique verò punctorum correſpondentium poſitio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti PF, QG verſus axem procurrentes convergunt) cum objectum FAG citra punctum H ſumitur, vides ejus ſpeciem quantitate adauctam, at ſitu non mutatam. verùm objecti RLS ultra concurſum H poſiti imago ϱλσ nedum prototypo major eſt, at quoad ſitum etiam eidem in verſa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi poſitione, objecti ſpeciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inverſam; ſubinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos caſus ad examen facilè rediges hoc ad ſpecimen aciem mentis intendendo.

Quinimò

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo plerasque superficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, positiones, distantias, figuras respiciunt) complurimumque *Phænomenon* causas ipse statim operâ levi deprehendes; quibus in expressius deducendis libri plures ad tantam molem extumescere vel possunt, vel solent; ut mihi saltem opus non sit hujusmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla succurrunt animadvertione non indigna, de magnitudinum etiam apparentium, tam *Dioptricis* quàm *Catoptricis*, specialia quædam proponam; ea verò commodius sequentem præstolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta sit, aliquatenus explendæ *Problematium* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum F G, ab oculi, circulique refringentis axe A B O bisectum; datúsque sit angulus simpliciter (oculo nempe nudo) apparens F O G. item assignetur punctum Z, quod imago sit puncti A a circulo refringente facta; datus sit denuò ex refractione apparens angulus P O Q; propositum est circulum istum refringentem describere (vel determinare). Fig. 175.

Analysis. Factum esto; sit nempe circulus B N, qualis requiritur, cujus sit centrum C, vertex B; & qui rectam O P in N secet. ducatur C Y ad O F parallela, rectæque O P occurrens in Y, & connectatur C N. cum itaque sit N Y refractus radii ad F O, vel C Y paralleli; erit C Y. Y N :: R. I. ergò ratio C Y ad Y N datur; & cum præterea angulus Y (dato F O P æqualis) detur, etiam (in triangulo C Y N) angulus C N Y innotescet. itaque triangulum C O N specie datur; unde ratio C O ad C N (vel C B) datur. est autem C B. C Z :: I — R. R. ergò ratio C B ad C Z datur. itaque ratio C O ad C Z quoque datur; unde ratio C O ad O Z datur. verùm O Z datur; ergò etiam C O datur. hinc demùm & ipsa C B datur.

Componitur autem in hunc modum. In O F utcunque capiatur $O\varphi$, & fiat $O\varphi . O\sigma :: R . I$. & connectatur $\sigma\varphi\zeta$; ducaturque Z R S ad $\zeta\sigma$ parallela. tum fiat O Z. Z T :: I — R. R (unde componendo O T. Z T :: I. R) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum X. O Z :: O Z. Y. denique X. Y :: O Z. O C (unde erit $Xq . OZq :: OZ . OC$; hoc est $OZq - Vq . OZq :: OZ . OC$; hoc est $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$). per C verò ducatur C N ad Z S parallela, secans O P in N. denique centro C per N ducatur circulus B N; is propositio satisfacit.

Nam ob $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$, erit OZ cub $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$. transponendóque $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$ cub. atqui propter $OZ . ZS :: OC . CN$. est $OZ \times CN = ZS \times OC$. quare $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$ cub, adeóque (elidendo OZ) erit $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$. vel $CN . OC - OZ :: OZ . ZT$, hoc est $CB . CZ :: OT . ZT$.. & componendo $BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R$. itaque primò liquet punctum Z imaginem esse puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob $CY . YN :: O . O\varphi :: R . I$, palàm est NO refractum esse radii ad CY, hoc est ad FO paralleli. liquidò proinde constat propositum. ||

In hoc casu debet esse $OZq - ZT \times ZS$. Haud absimili ratione quoad alios casus (ut si circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego specimen tantùm *institui Problematis*, juxta quod visibilis objecti species per refractionem circularem secundum præstitutas quantitatem atque distantiam utcunque possit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò strigosior Lectio nonnihil incrassetur, faciam hîc (quanquam alienore loco) quod alibi (si mihi tunc in mentem venisset) factum oportebat; raciociniis nostris adversantem, à viro doctissimo (alioquin opinor rarò dormitante) commissum paralogismum, nè cui fraudi sit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam nostram confirmabo. horsum è præmissis consequens, sed & experientiæ (ut videbimus) consonum hoc præsterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehensum objectum (puta lucidum punctum A) revera duplum apparet, seu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi sint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uspiam constituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occursum X existat, è supra positis, ac probatis consectatur (omnes enim imagines ad illa consistere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi intersecant) itaque duæ sunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis φ) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujusvis hoc modo spectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines istæ duæ (quales α, α) ita sibimet ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibiliter coalescant; ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secùs apparet; id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species α, α; quarum illa (α) clauso oculo O, hæc (α) clauso P disparebit. Fig. 177, 178.

Notetur autem, si placet, imaginum α, α intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magis, nunc minùs deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducatúrque F G ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam F E minor est quàm F G, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam consistet imago α, ab altera α magis elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certè quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propiùs ad motam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem $\varphi \alpha \gamma$; rursus (oculo O occluso) altero P conspicies imaginem fag, à priore $\varphi \alpha \gamma$ aliquantùm deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicies, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutrâ. Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quàm uno; speciebus ità coëuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam præterea subdemus instantiam: Per sphæram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N transluscentem lucernulæ flammam A specta; ejus duas imagines α, α observabis (pro oculorum situ magis à se minúsve dissitas) quarum una (α) clauso oculo O, altera (α) clauso P evanescet. Fig. 180.

Videtur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret. *Paralipom. pag.* 178.

Has

Has instantias, facilitatis gratiâ, ità proposuimus, quasi punctum A, unà cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert; duas utcunque species apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

In Dioptr. His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; quo nempe *P. Herigonius* propositionem hanc suam comprobatum it: "Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis sè mutuo contingen-"tibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per "punctum refractionis directè producti.

Fig. 181. Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D conveniant in C; sit autem superficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiei refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B sunt in superficie coni recti, cujus axis est recta F G. quòd si prior casus ponatur, è suprà demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeóque in harum concursu; concursus autem iste non est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud satis enervant. ||

Lect.

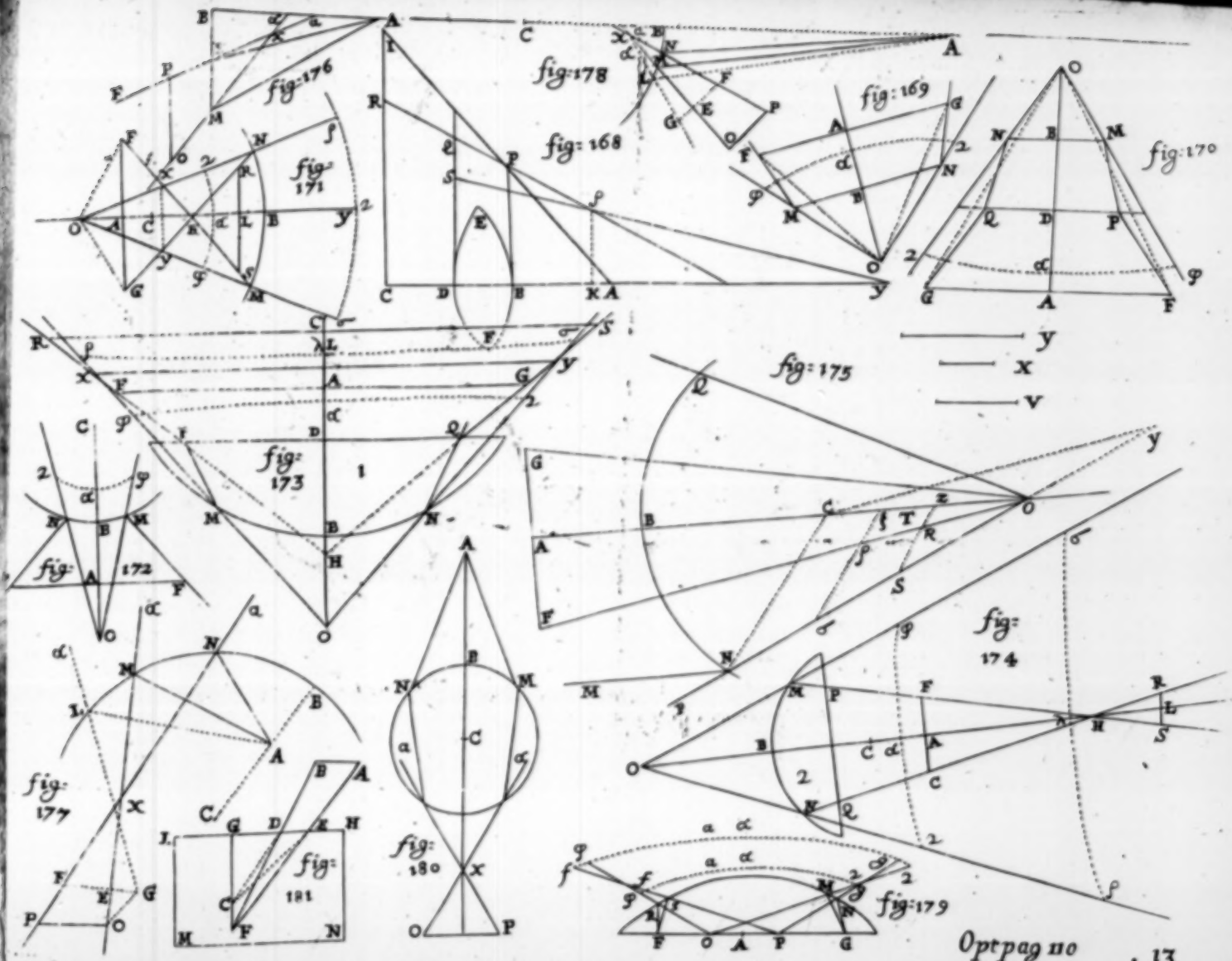


fig: 176
fig: 178
fig: 169
fig: 168
fig: 170
fig: 171
fig: 173
fig: 172
fig: 175
fig: 174
fig: 177
fig: 181
fig: 180
fig: 179
y
x
v

Opt pag 110

Lect. XVI.

I. *Punctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis*, conquiescere posſem; siquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines designando. cæterùm nè justo parciùs in hac parte, vel liberalius egisse videar, etiam *de rectarum linearum (consequenter & planarum superficierum, quibus distincte visui repræsentandis natura præcipuè consuluisse videtur) apparentiis & imaginibus expressiora specimina quædam haud gravabor adnectere*. de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimis; Sicuti (quod sæpiùs in antedictis habetur insinuatum) cujusque puncti quodammodò duplex est imago; una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum simul ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ raditionis, superficiei reflectentis, ipsiusque visionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minùs præcipua; quæ talis est respectu oculi extra rectam inflectenti superficiei perpendicularem arbitrariè constituti; ità pari fermè modo duplex cujusque magnitudinis imago concipi potest una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine designabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in objecta congrua superficie vividè deformaretur; qualisque videretur oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione constitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè multis in decursu proponendis luculenter apparebit.

Fig. 181. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam ſi placet ac aërem)* repræſentet recta P Q, & aquæ inſit recta F P ad P Q perpendicularis. fiat autem F P. X P :: R. I; erit X P imago abſoluta rectæ F P; continet illa ſcilicet omnes locos punctorum, quæ in F P, oculo apparentes in ipſa F P ſito. verùm ſi ponatur oculus uſpiam extra F P, velut ad O, ei tota F P citra X P apparebit. tranſeat videlicet alicujus radii F M refractus per O, & protrahatur O M, ut occurrat ipſi F P in K. eſt ergò (ſecundum præmonſtrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius oſtenſis) puncti F imago quæ in refracto O M K, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. ſimili ratione cujuſvis alterius in ipſa F P accepti puncti, ceu R, imago (cogitata) citra rectam X P, verſus oculum, jacet. totius itaque rectæ F P imago talis eſt, qualem curva linea φ ϱ P refert. quod ſi P F infinitè protrahatur, ejus totius imago P ϱ ϱ verſus aſymptoton O B A, ad P F parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P ϱ φ hoc modo.* ab O ducatur utcunque recta O M K ſecans rectam P Q in M; & (poſito fore S = $\sqrt{Rq - Iq}$) ſit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur H φ ad P R parallela, ipſi O K occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, ſi O M K ipſius M F refractus concipiatur, erit punctum φ ipſius F imago. eodem modo reliqua lineæ P ϱ ϱ puncta deſignantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adſumptâ rectâ F G ad P Q parallelâ, ductâque G Q ad F P (vel A B O) parallelâ; item per X ductâ X α Y ad P Q parallelâ, erit quidem recta X α Y rectæ F A G imago abſoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam X Y tota jacet, eámque curva φ α γ repræſentat, admodum jamjam præſcriptum punctatim delineabilis. itaque compoſitæ lineæ P F G Q, circa axem O B A rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vaſculi cylindrici aquâ repleti ſuperficiem inſpectando.

Fig. 183. VI. Quòd ſi recta viſibilis F G ad P Q inclinata ſit, cum ea conveniens in V; & connectatur X V, erit rurſus X Y ipſius F G imago abſoluta; relatam verò curva φ α γ repræſentat.

Fig. 184. VII. Quòd ſi viciſſim *oculus O in aqua ponatur conſtitutus*, & ab indè reſpiciatur recta P F in aëre poſita, fiátque rurſus P F. P X :: R. I;

R. I; erit quidem X P imago rectæ F P abſoluta; at ejuſdem imago relata (puta P φ γ) ultra P F R jacet, ab illa ſenſim reclinans; ejuſque puncta quælibet ità ſignantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q ſecans in M, & ſit K M ipſius F M refractus, tum (poſito rurſùs $S = \sqrt{Iq - Rq}$) fiat $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq} PM$, & per H ad P F parallela ducatur H φ, ipſam O M K interſecans ad φ; erit punctum φ in dicta linea, punctum ſcilicet F repræſentans. eodemque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipſam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata φ α γ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris. caſûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem appoſita figura ſatis exprimit.

Hæc autem omnia de ſuprà comprobatis dilucidè conſectantur.

IX. Ac ità quidem circa ſimplices planas ſuperficies refringentes Fig. 185.
ſeſe res habet. Quòd ſi corpori parallelis planis M N, μ ν terminato exponatur recta F G; Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipſi P Q perpendiculares, & fiat B D. B S :: I. R; adſumatúrque A α = D S; & fiat A B. α C :: F P. X P; & per X, α ducatur recta X α Y, erit X α Y linea F A G imago abſoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc caſu) citra ipſam X α Y verſus ſuperficiem μ ν nonnihil incurvata diſponetur, qualem exhibet linea φ α γ. id quod ex eo ſatis videtur liquere, quòd recta X α Y ſit imago reſpectu oculi in ipſa O B à B infinitè ſemoti. deſignari verò poterit hæc imago ad hunc modum. ſit *fag* (minuſculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad ſuperficiem refringentem μ ν relata (hoc eſt ad oculos in refractis f μ M, q ν N, a D B, reliquiſque, nec non in medio μ ν M N verſus O protenſo, ſitos) juxta proximè commonſtrata delineabilis. tum hujus ipſius *fag* velut in medio M N μ ν verſus A protenſo poſitæ, ex refractione ad ſuperficiem M N emergens, & ad oculum O relata conſtruatur imago φ α γ (itidem ad modum nuperrimè præſcriptum) hæc rectam F A G per corpus M N μ ν ſpectatam repræſentabit. experientia teſtis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore ſupersedeo.

X. Porrò quod *plana ſpecula* (ſimplicia, vel compoſita) attinet, in iis palàm eſt imagines abſolutas ac relatas omnino ſibi coincidere; quo fit, ut ex objectorum magnitudines, figuras, diſtantias (ſitu

tamen nonnunquam inverſo) quàm exactiſſimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitùs reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA, in qua ſumatur portio quædam AR, fiátque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB, erit YX imago abſoluta rectæ RA; quòd ſi CB biſecetur in Z, erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago abſoluta; hoc eſt, illæ tales erunt oculi reſpectu in ipſa AB conſtituti. ſecùs autem uſpiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conſpicuum eſt (hoc eſt quod ſupra horizontem OT, ſpeculo contiguum extat) ſupra citráque XB apparebit. Enimvero tranſeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim oſtenſum) ſupra punctum X, verſus A, extat. quinetiam (ex indidem monſtratis) puncti A imagines omnes, oculum O reſpicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA verſus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta α, in ipſa KM exiſtet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox oſtendemus). ſimili ratione puncti R imago, cogita ρ, ſupra Y, citráque BY jacet. quòd ſi porrò per O tranſeat recta ODLH, quæ reflexa ſit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipſa AB infinitè ſemoti, hæc puta ſit ad σ. erit itaque curva Bρασ imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Iſta verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO deſcribatur circulus OTC, & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa ſit MA, in qua ſumatur ME = MF, tum ſecetur FM in α, ut ſit Fα. αM :: AE. AM, erit (è pridem demonſtratis) punctum α puncti A imago. ſimili modo quotcunque lineæ Bαρσ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem ſit punctum α citra K (verſus oculum) ità conſtabit. Ducatur FQ ad AM parallela. eſt ergo angulus FQA par angulo CAM. aſt angulus FCA angulo ACE minor eſt. ergò eſt CF. FQ ⊏ CE. AE. atqui CF = CE, quare FQ ⊐ AE. ergò eſt FQ. AM ⊐ AE. AM. hoc eſt FK. KM ⊐ Fα. αM. componendóque FM. KM ⊐ FM. αM. unde KM ⊏ αM. adeóque punctum α citra K verſus O jacet: Q. E. D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communisque fermè sententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipsam B L imagines statuit; proindeque corruunt omnia, quæ principio superextruunt isti gratis adsumpto, rationique dissentaneo. Veruntamen *Opticorum nevissimus scriptor, eruditissimusque vir*, veterum ipse vestigiis insistens postulatum istud ab experientia stabilitum vult, ejúsque veritatem sese deprædicat centies explorâsse, doctrinam itaque nostram invicto sensûs testimonio refutavit. atqui repono, non potuisse illum quantumvis oculatum & sagacem quod obtendit vel semel explorare. nec hoc in casu poterit doctrina nostra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A situm exactè dignoscere perquam arduum, forsan impossibile fuerit) quum lineola B α ϱ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræsentet, ipsúmque punctum σ (infinitè dissito puncto S respondens, atque rectam D H bisecans) à puncto L modicè distet, quæ amabo visûs acies curvæ B α σ à recta B L deflectionem cernat? itaque frustrà esse videtur acutissimus vir, ad testem provocans hac in parte minùs competentem, déque cujus sententia vix ullatenus constare possit. Sanè quoad affinem in *Diopricis* casum, quem attigimus supra, demisso in aquam perpendiculo, oculo simpliciter inspectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verùm ope reflectionis justum perpendicularis situm observando (qui nudo scilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immersi perpendiculi imago ab ipso deviare. neque dubito quin pariter in præsente casu ritè consulta experientia pro nobis sit pronunciatura. Quinimò nostris ex effatis (luculentâ opinor ratione suffultis) apparebit, unde principium illud multis in casibus experientiæ videatur consentire; quoniam nempe contingit, ut in iis a vero non multùm abscedat; ejúsque proinde falsitatem sensûs (nisi ratione, vel certiore sensu adjutus) perspicere nequeat. ast exorbito.

XV. Sit rursus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, bisecetúrque semidiameter C B in Z; ac in Z B sumptis quibuscunque punctis A, R; fiat C A. A B :: C X. X B; itémque C R. R B :: C Y. Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago absoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C usquam constituto visu, velut ad O, ad hunc relatæ ipsius Z B, ejúsque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum CO describatur circulus CFH; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit DS, contingat fore DS = ⅓ DH, vel ⅓ DI; positâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facilè duci posse concipiatur; & per curvam appropriatam reverà statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, nisi Hσ, σD sint infinitæ) est Hσ.σD :: IS.SD. Jam in arcum DB cadat utcunque rádius OM, cujus reflexus sit MAE; & in hac sumatur ME = MF; tum in OM producta capiatur punctum α, ut sit Fα.αM :: EA.AM; erit α puncti A imago. simili methodo reperiatur, puncti R imago; neque non reliqua totius Rβαστ, ipsam BS referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd CS⊏CZ. Nam 4CZq = CBq = 3SDq + CSq. ergò quum sit CZ⊏SD; erit CS⊏CZ.

2. Quod CA⊏CS. Nam (è suprà monstratis) si ducatur recta M↓ ad DO parallela, ejusce reflexa (puta Mξ) secabit ipsam DS, versus I, puta ad ξ. ergò Mξ ipsam CB secabit supra punctum S, velut ad φ. atqui quoniam ang. CMO⊏CM↓, seu ang. CMA⊏CMφ, est CA⊏Cφ; adeóque magis est CA⊏CS.

3. Quod EA⊏AM. cùm enim sit EM (vel FM) ⊏ HD, atque DS⊏MA; erit EM.MA⊏FD.DS :: 2.1.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam Bβαστ ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela est hic ang FCA⊏ang ACE. & ang FQA = ang CAE. quapropter erit CF.FQ ⊐ CE.AE. adeóque FQ⊏AE. ac indè FQ.AM⊏AE.AM; hoc est FK.KM⊏Fα.αM. dividendóque FM.KM⊏FM.αM. quare αM⊏KM. adeóque punctum α ultra K in recta OK protensa jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ OD ducatur rádius ON' cujus reflexus NGT = NV; sitque TG.GN ⊐ 2.1; statuenda est puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantùm instituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosiùs prosequi) à minutiis abstineo. quò & indè promior sum, quoniam in hac re copiosus videtur *A. Tacquetus*; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo

sugge-

ſuggerens haud aſpernanda. relinquantur igitur ei cætera, mihi ſufficerit, quòd veriorem *Phænomena* detegendi declarandique methodum adniſus ſim aliquatenus enucleare. pergamus ad alios caſus, haud ità pertractatos.

XIX. Objiciatur ſpeculo M B N D recta F A G, rectæ C A (per ſpeculi centrum C tranſeunti) perpendicularis; adverto, ſi fuerit ipſa C A major quàm C Z, quadrans diametri B D, quòd rectæ F A G ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas ſimul ac convexas) imago abſoluta (quinetiam imago ad oculum in ipſo centro C conſtitutum relata) erit *Ellipſis*. item ſi C A minor ſit, quàm C Z, quòd ipſius F A G imago abſoluta (vel dicto modo relata) conſtabit ex hyperbolis oppoſitis; ſi denuò C A ipſam C Z adæquet (vel F G per ipſum Z tranſeat) quòd ad parabolam ejuſmodi conſiſtet imago. Sed modum tranſgrederer hæc jam aggrediens demonſtrare. Expectent igitur. ‖ Fig. 189.

LECT. XVII.

I. AD ea, quæ ſub finitam præcedentem propoſuimus demonſtranda *neceſſariam, aliquin notabilem, Conicarum Sectionum proprietatem* imprimis oſtendemus.

Sit triangulum A C E, rectum habens angulum ad C; & indefinitè protractis lateribus A C, A E, in A C ſumatur quod piam punctum X, ducatúrque X G ad C E parallela; inſeratur autem angulo C X G recta C Z æqualis ipſi X G; dico punctum indeterminatum Z ad ſectionum conicarum aliquam conſiſtere. Fig. 190.

II. Nempe primò, ſit angulus A ſemirecto minor (vel A C ⊂ C E) erit punctum Z ad ellipſin, quæ determinatur hoc pacto: Anguli L C P ſemirecti fiant (ad utramque rectæ C E partem) liquet igitur rectas C P ipſi A E occurrere, puta ad puncta R, & S. ab his ad

ad ipſam EC parallelæ ducantur rectæ RT, SV; palàm eſt indeterminatum punctum X inter limites T, V conſiſtere (nam extra TV punctum quodlibet L accipiendo, & indè ducendo LIP ad CE parallelam, erit CL, hoc eſt LP, major quàm LI, unde à C ad rectam LI, nulla duci recta poteſt æqualis ipſi LI). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipſin exiſtit, cujus axis TV, focus C. Nam biſecetur TV in K, fiat VD = TC, ducatur KH ad CE parallela, per H ducatur HN ad CK parallela. Eſtque $KH = \frac{TR+VS}{2} = \frac{CT+CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam AV. AT :: (VS. TR (hoc eſt) :: CV. CT ::) CV. DV; erit per rationis converſionem AV. TV :: CV. CD. vel, conſequentes ſubduplando, AV. KV :: CV. CK. dividendóque AK. KV :: KV. CK; hoc eſt AK. KH :: KH. CK. hoc eſt HN. NG :: KH. CK. quare KH × NG = CK × HN = CK × KX. atqui eſt $CZq = XGq = KHq + NGq + 2KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2CK \times KX = CKq + KXq + 2KH \times NG$. ergo $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras biſegmenti K partes ſumatur $K\xi = KX$, ducaturque $\xi\gamma$ ad KH parallela, ſecans curvam TEZV in ζ, & rectam AH in γ, ac ipſam NH in ρ; erit quoque, ſimili ex diſcurſu, $\xi\zeta q = KHq + \rho\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$; connexiſque proinde rectis Cζ, Dζ, erit Dζ = CZ; & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel DZ + CZ) = TV. unde perſpicitur *curvam* TζZV *eſſe ellipſin*, cujus *axis* TV; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem ſecundò angulus CAE major ſemirecto (vel AC ⊐ CE) dico punctum Z ad oppoſitas hyperbolas, conſimili modo determinabiles, exiſtere. enimverò factis (ad utramque rectæ CA partem) angulis ſemirectis ACP; & (ab ipſarum CP cum AE occurſibus) ductis rectis RT, SV ad CE parallelis, punctum X extra limites TV neceſſariò conſiſtet (etenim ubivis intra TV ductâ LIP ad CE parallelâ, erit LI ⊐ LP, ideóque nulla par ipſi LI angulo ALI ſubtendi poteſt, id quod extra terminos hoſce nil prohibet fieri) erit jam TV axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in caſu præcedente, eritque rurſus hic KH = KV. item ob AV. AT :: CV. DV; & (inversè componendo)

AV.

AV.TV::CV.CD, & consequentes subduplando, dividendóque AK.KV::KV.KD::KV.CK. vel AK.KH::KH.CK; hoc est HN (KX).NG::KH.CK; quare CK×KX=KH×NG. est autem XZq=CZq—CXq=XGq—CXq=NGq+KHq—2NG×KH:—KXq—CKq+2CK×KX=NGq+KHq—KXq—CKq. Sumatur Kξ=KX, discursúmque similem adhibendo liquebit fore ξζ=XZ; & ideo Dζ=CZ. unde Cζ—Dζ (DZ—CZ)=Cζ—CZ=ξγ—XG=2KH=TV. quare manifestum est *curvas* TZ, Vζ esse *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

IV. Tertiò demùm, sit angulus CAE semirectus (vel CA=CE) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ itidem ita determinatur. Fiat angulus ACP semirectus, & ab ipsarum AE, CP intersectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota sectionis hujus proprietate constat; qua scilicet est TA=TR=TC (ob angulos TAR, TCR semirectos) & AX=XG=CZ. Fig. 192.

V. Manifestum est verò rectam AE sectiones has ad E contingere: quia nempe perpetuò major est CZ (vel XG) ordinatâ XZ, adeóque puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc est tota AG extra illas cadit.

VI. Hisce præstratis: *Esto Circulare speculum* MBND, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam FaG; & huic perpendicularis sit recta Ca; quam ad partes aversas sumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. sumpto jam in recta FaG puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipsa FC limes, seu *focus*, sit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipsi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipsi CZ. Fig. 193.

Nam (è jam antè monstratis) est FC.CZ::FM.MZ (hoc est) ::FC—CB.CB—CZ. hinc erit aC.CX (AC.CX)::FC—CB.CB—CZ. quare (ducendo in se extrema, ac media) erit AC×CB—AC×CZ=CX×FC—CX×CB. hoc est (ipsi CX×FC substituendo AC×CZ, propter aC.CX::FC.CZ) erit AC×CB—AC×CZ=AC×CZ—CX×CB. transponendóque AC×CB+CX×CB=2AC×CZ.

hoc

hoc est $AX \times CB = 2AC \times CZ$, vel $2AX \times CE = 2AC \times CZ$; unde $AX.AC :: CZ.CE$, hoc est $XH.CE :: CZ.CE$. quapropter est $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus. examinetis ipsi, peto.

Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit $CA \sqsubset CE$, quòd omnes punctorum F limites, seu foci (quales Z) ad ellipsin existunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmissis, non uno modo, determinatur. item si $CA = CE$, limites Z ad parabolam consistent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2}CE$, *vertex* T. denuò, si $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas esse constat*, quarum itidem *focus* C; & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò sectionum *Parameter* ipsi CB æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi *sectiones conicæ* sunt rectarum FaG absolutæ imagines; quin & eædem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constitutum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

IX. Patet autem si recta FaG infinitè distet, quòd *ellipsis* in *circulum* abit. uti quoque si FaG per centrum transeat, quòd *hyperbola* istæ in rectam lineam degenerant.

X. Subnotetur etiam in casu quum *imago sit hyperbolica*, quod *hyperbola* YTY pars YEEY, neque non tota ζVζ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe si centro C per E descriptus circulus ipsam FG intersecet punctis K, tota hyperbola ζVζ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars superior YEEY quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensæ rectæ FG) pars autem ETE ad partem concavam MDN spectat. id quod sufficerit admonitum.

Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. sit, instantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & sit ellipsis ZVYT absoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago; quam ductæ FC, GC punctis Z, Y secent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta φ, & χ) extra

ellipsin

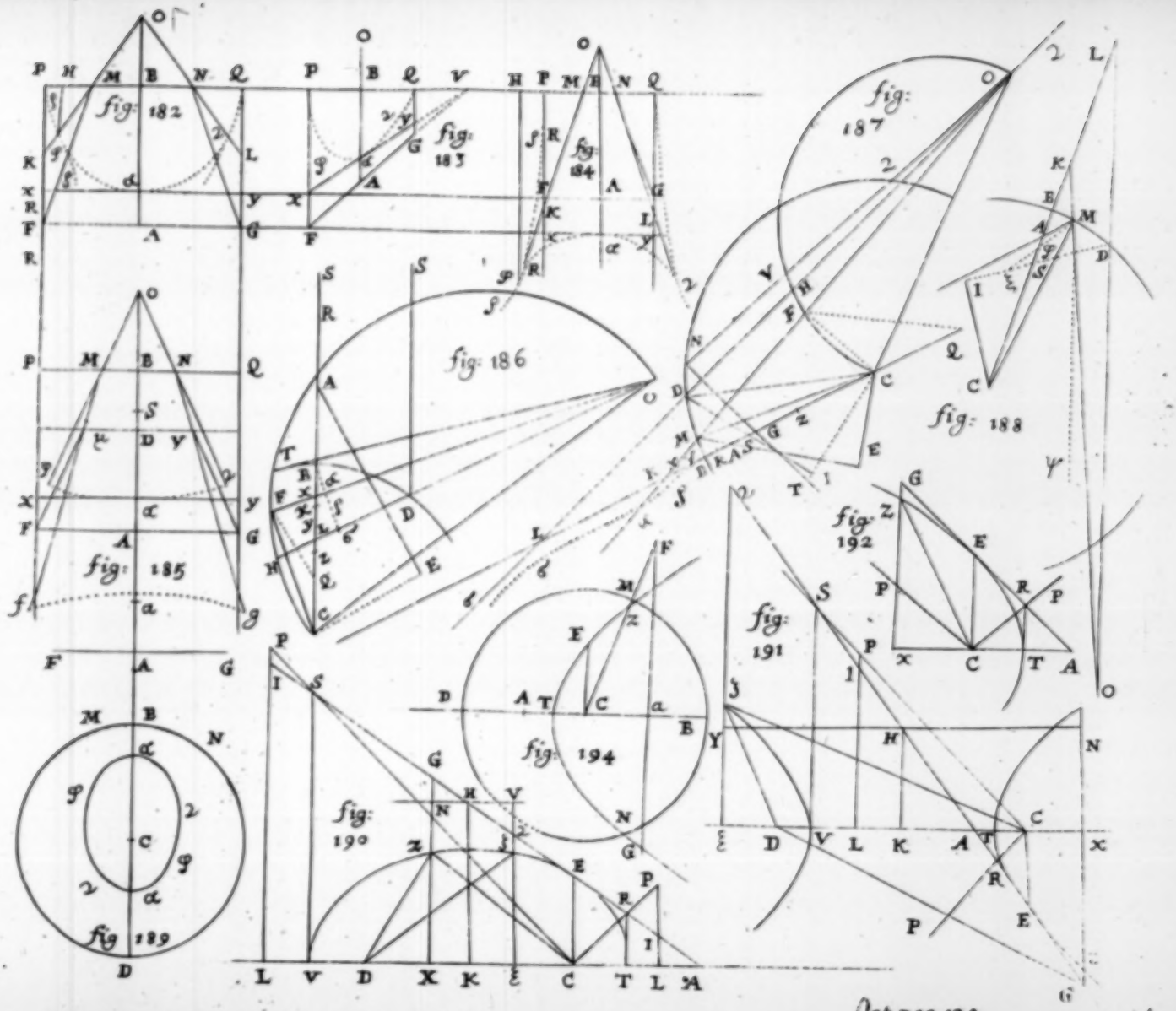


fig: 182
fig: 183
fig: 184
fig: 185
fig: 186
fig: 187
fig: 188
fig: 189
fig: 190
fig: 191
fig: 192
fig: 194

Opt pag 120

Fig.
194.

Fig.

ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum ψ inter O, & L cadunt. imaginis itaque φαψ figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam è præmissis luculentè constat quo pacto linea φαψ præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda, postquam tamen paullùm respiravero, nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiúmque demonstrandis istis impensum respectando, satis fortasse multa videor tradidisse. ||

LECT. XVIII.

I. *Propositum est jam nobis recta linea ex refractione progenitas ad circulum imagines designare*, nempe primùm absolutas; quorsum hoc spectat *Theorema*:

In circulum (e.g. medii densioris) refractivum M B N D radiet recta F A G; huic verò perpendicularis sit recta C A (circuli centrum C permeans) tum in rectâ F G sumpto liberè puncto F ducatur recta F C; & in hac sit punctum Z limes (qualem anteà fiximus) radiationis à puncto F; sit autem Z X ad A C normalis. porrò fiat C A . C R :: I . R; & A R . C B :: C R . C E (ponatur autem C E ad X Z parallela) tum connexa R E cum ipsa X Z conveniat in H. dico fore X H = C Z. Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est F C × M Z . F M × C Z :: I . R :: C A . C R. hoc est F C × C M + F C × C Z . F C × C Z − C M × C Z :: C A . C R. quare (ducendo in se extrema, mediáque) est F C × C M × C R + F C × C Z × C R = F C × C Z × C A − C M × C Z × C A = F C × C Z × C A − C M × F C × C X (quoniam scilicet est C Z.

CZ.FC::CX.CA; adeóque CZ×CA=FC×CX). quapropter (elidendo FC) est CM×CR+CZ×CR=CZ×CA—CM×CX, transponendóque CM×CR+CM×CX=CZ×CA—CZ×CR. hoc est CM×RX=CZ×AR. quare (ad analogismum redigendo) est AR.CM::RX.CZ, hoc est CR.CE::RX.CZ. hoc est RX.XH::RX.CZ, unde XH=CZ: Quod E.D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *sectiones conicas* nuperrimè sunt ostensa) liquido consectatur, si CR major fuerit quàm CE (vel quod eódem recidit, AR major quam CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines absolutæ (quales Z) ad *ellipsin* consistent, cujus *Focus* C, cujúsque penitus determinandæ modum satis facilem tunc ostendimus. item si CR=CE, quòd imagines istæ ad parabolam erunt; & denique, si CR⊐CE, quod eædem in hyperbolis oppositis reperientur; quarum etiam sectionum focus communis est punctum C, & quarum axes designandi modum reliquáque circa ipsas præsertim advertenda declaravimus. (Nempe, si rectæ CP cum ipsa CA semirectos constituant angulos; & hæ rectam RE intersecent ad puncta S, indéque demittantur ad AC perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, rectáque CE semi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protensæ absolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C positum refertur) aliquam esse dictarum conicarum, pro suo peculiari situ hanc vel illam respectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in isto casu, *sectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL spectare, sicuti posticæ EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbolæ* ETE pars (intra ECE) YEEY ad partem circuli convexam referri debent (nempe si centro C, intervallo CE descriptus circulus rectam FG secet punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræsentabit, ipsúmque FG quod reliquum est hinc inde protensum pars YEEY referet) pars autem superior ETE ad cavam circuli partem LDL spectat. || Semper autem (cùm hic, tum ubique) intelligatur ad utrasque propositi circuli partes ejusdem generis refractionem effici, seu ejusdem speciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura construenda adhibuit,

buit, solertia quadantenus elucescere videatur, seu ratio quædam assignari possit, cur oculi fundus *Sphæroidicam* (aut ab hac non multùm abludentem) nacta sit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè distantium (quibus in distinctius apprehendendis potissimus versatur usus) excipiendis simulachris est accommodatissima. Sed hoc *mysterium*.

V. In reliquis refractionum casibus paria fermè contingunt, quos ideò tacitus prætерlabi possem; at minuendo vestro labori, seu quò clariùs & promptius de iis constet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N objiciatur recta F A G, cui normalis C A; sitque punctum Z puncti cujusvis F, in F G sumpti, imago absoluta; & Z X ad C A perpendicularis; ac C A. C R :: I. R; & R A. C B :: R C. C E; & ipsi R E connexæ occurrat X Z protracta ad H; eritque rursus X H = C Z. Fig. 199.

Nam est C A. C R :: (F C × M Z. F M × C Z ::) F C × C Z — F C × C M. F C × C Z — C M × C Z. quare C R × F C × C Z — C R × F C × C M = C A × F C × C Z — C A × C M × C Z = C A × F C × C Z — F C × C M × C X. ac indè C R × C Z — C R × C M = C A × C Z — C M × C X. transponendóque C R × C Z — C A × C Z = C R × C M — C X × C M; hoc est R X. C Z :: A R. C M :: R C. C E :: R X. X H. quapropter est C Z = X H.

VI. Hinc dilucidè rursus apparet rectæ F A G imaginem absolutam (vel ad oculum in centro C situm relatam) si R C ⊏ C E, *ellipticam* fore; sin R C = C E, fore *parabolicam* (quarum sectionum pars anterior E T E ad convexam circuli refringentis partem M B N pertinet, posterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd si fuerit R C ⊐ R E, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbola* Y T Y pars superior E T E ad circuli partem N B N referenda est; pars autem inferior Y E E Y una cum tota hyperbola ζ V ζ ad partes concavas L D L pertinebit. nempe si fuerint rectæ C K æquales ipsi C E, tota hyperbola ζ V ζ interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejúsque quod hinc indè protensum supereſt ab ipsa Y E E Y repræsentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hosce casus animadvertere licet posse sectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diversos circulos

concentricos expositis repræsentandis inservire. nimirum in casu postremo, si reliquis stantibus punctum A indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ ζ∘ζ, YTY rectas FAG repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri CB ipsis AI singulæ respectivæ singulis æquantur, modò semper intelligatur esse CA. CR :: I. R. id quod satis fuerit obiter admonuisse.

VIII. Ut & illud cursim innuisse sufficerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ità vicissim *conica sectiones* à rectis lineis ex justa congruos ad circulos inflectione repræsentantur; quos utique non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ sectione* circulus & recta facilè designantur, ità ut conica rectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco C ad axem CV applicetur normalis CE; & recta ER sectionem tangat ad E; factoque CR. CA :: R. I; ducatur per A recta AI ad CE parallela; sitque CB = AI; tum centro C per B ducatur circulus MBN, peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet eæ saltem unum (in recta per oculi, circulique refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua verò respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quam verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii FMO, GNO; sit autem *ellipsis* TZVY rectæ FG absoluta imago, quam connexæ FC, GC punctis Z, Y secent (ità quidem ut Z sit puncti F, & Y puncti G imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum K supra Z versus C existere; quinetiam puncti F in recta MO imaginem (puta φ) ultra FZ jacere. Similiter puncti G imago (χ) supra Y, ultràque GY sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis φχ positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in appositâ exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimiâ molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari. Fig. 201.

XI. Ità

XI. Ità rectarum linearum ad ſphæricam ſuperficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque ſuperficierum ad eandem repræſentationibus haud difficilè ſtatuetur; harum ſcilicet imagines abſolutæ *conoidum aut Sphæroidum Superficies erunt* è rectarum imaginibus reſpectivis circa radiationum axes converſis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum ſuperficierum imagines è rectarum imaginibus relatis ſimili pacto progenerantur. rem totam ipſi mentem aliquantiſlùm advertentes perſpicietis; me ἀπολογίας extremæ faſtidium capit.

XII. Reſtare videtur, ut quomodò compoſitæ ſuperficies ſphæricæ objectas repræſentant lineas diſpiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ ſint altioris gradûs lineæ, ab uſu notitiâque communi ſegregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis deſudans extricandis. illas itaque tranſiliam, hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium poſitiones è præmonſtratis dignoſci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII. Hæc ſunt, quæ circa partem *Optica* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi ſuggeſſit meditatio. circa reliquas (quæ φυσικώτεραι ſunt, adeóque ſæpiuſculè pro certis principiis plauſibiles conjecturas venditare neceſſum habent) nihil ferè quicquam admodum veriſimile ſuccurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Cartesius*, & poſt illos alii tradiderunt) alienum aut diverſum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam cramben reponere. proinde receptui cano; nec ità tamen ut prorſus diſcedam, anteaquàm improbam quandam difficultatem (pro ſinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè diſſimulandam) in medium proculero, quæ doctrinæ noſtræ, hactenus inculcatæ, ſe objicit adverſam, ab ea ſaltem nullam admittit ſolutionem. illa, breviter, talis eſt: *Lenti vel ſpeculo cavo* E B F exponatur viſibile punctum A, ita diſtans, ut radii ab A manantes ex inflectione verſus axem A B cogantur; ſitque radiationis limes (ſeu puncti A imago, qualem ſupra paſſim ſtatuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uſpiam poſitus concipiatur oculus. quæri jam poteſt, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorſum ad punctum Z videri natura non ſert (cùm omnis impreſſio ſenſum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. noſtris autem è placitis conſequi videtur ipſum, ad partes anticas. Fig. 202, 203,

ticas apparens, ab intervallo longiſſimè diſſito, (quod & maximum ſenſibile quodvis intervallum quodammodo exſuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (ſecluſis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abeſſe ſentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotiſſimè poſitum æſtimetur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magis, ſi fieri poſſet, quoad apparentiam elongetur. quin & circa caſum hunc generatim inquiri poſſit, quidnam omnino ſit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciatque quòd conſtanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* reſponderi poſſe videtur, niſi debere punctum A perpetuò longiſſimè ſemotum videri. Verùm experientia ſecùs atteſtatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z poſitione variè diſtans; nunquam ferè (ſi unquam) longinquius ipſo A liberè ſpectato, ſubindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quo oculum appellentes radii magis convergunt eò ſpeciem objecti propiùs accedere. nempe, ſi puncto B admoveatur *oculus*, ſuo (ad lentem) ferè nativo in loco conſpicitur punctum A (vel æquè diſtans, ad *ſpeculum*;) ad O reductus oculus ejuſce ſpeciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipſum exiſtimat; ac ità ſenſim, donec alicubi tandem, velut ad Q, conſtituto oculo objectum ſummè propinquum apparens in meram confuſionem incipiat evaneſcere. quæ ſanè cuncta rationibus atque decretis noſtris repugnare videntur, aut cum iis ſaltem parùm amicè conſpirant. Neque noſtram tantùm ſententiam pulſat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimis ac vulgatam, noſtræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctiſſimus *A. Tacquetus* iſti principio (cui penè ſoli totam inædificaverat *Catoptricam* ſuam) ceu infido ac inconſtanti renunciârit, adeoque ſuam ipſe doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, ſi rem totam inſpexiſſet penitiùs, atque difficultatis fundum attigiſſet. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoúſque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifeſtè rationi conſentanea video, diſcedam; præſertim quum ut hîc accidit, ejuſmodi difficultas in ſingularis cujuspiam caſûs diſparitate fundetur. nimirum in præſente caſu peculiare quiddam, naturæ ſubtilitati involutum, deliteſcit, ægrè fortaſſis, niſi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblanditretur animo meo, nedum planè ſatisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, reſolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi, Valeatis.*

FINIS.

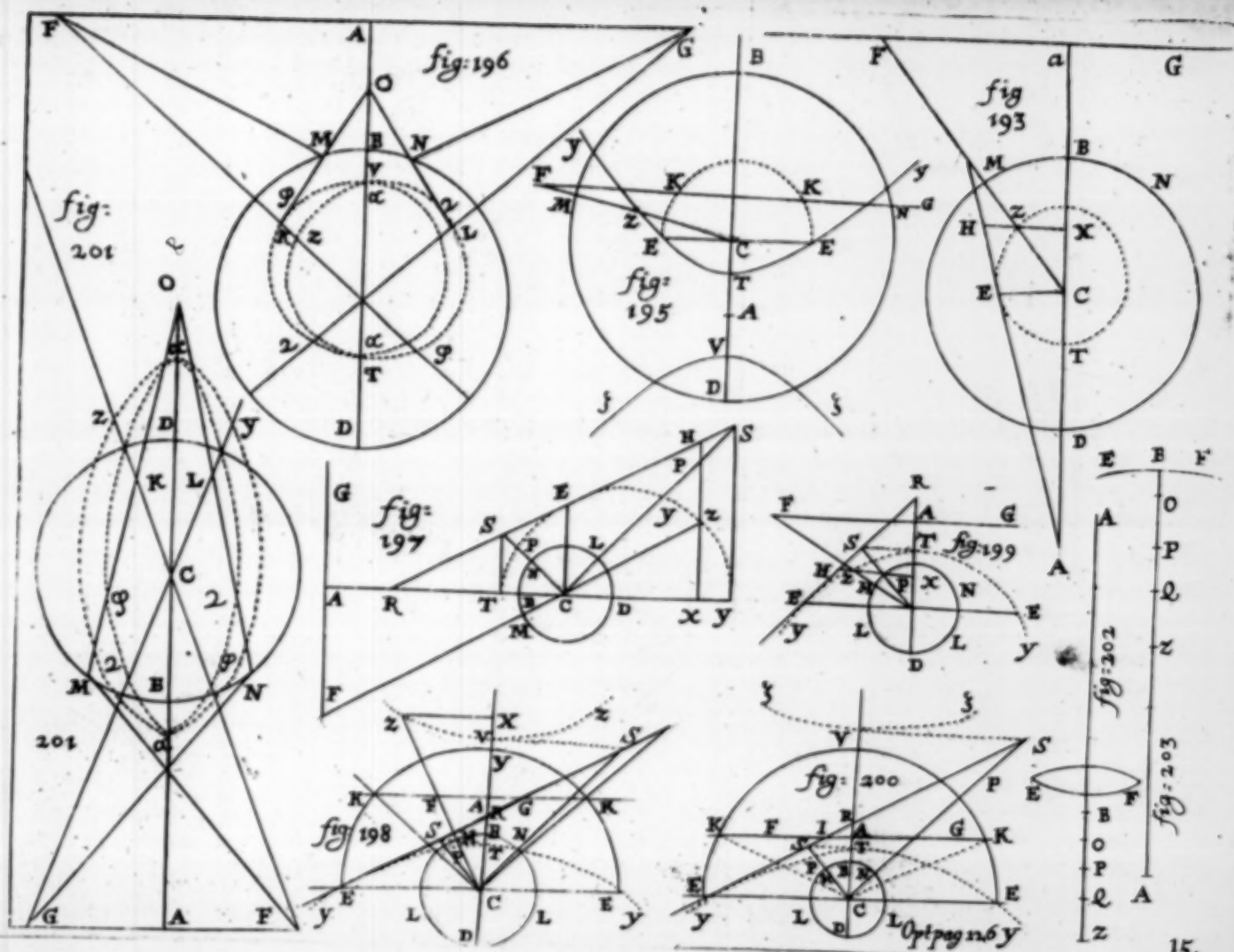


fig: 196
fig: 195
fig 193
fig: 201
201
fig: 197
fig: 199
fig: 198
fig: 200
fig: 202
fig: 203
Opt pag 126

ERRATA.

Pag. 3. lin. 25 luce. (præſente, leg. luce (præſente p 4, l 11, deſcepetatur l diſcepetatur ib. l 31, valeat, id l valeat id p 5, l 11, toto l tota, p 6, l 23, dici l dicitur, p 11, l 10, allas l alias, p 13, l 27, proximo l proximos, p 14, l 12, contranitmum l contranisum, p 14, l 16, effectant l affectant, p 15, l 14, nobile l mobile, p 16, l 20, in quæ l in iis quæ, p 17, l 3, ſubſtracto l ſubſtrato, p 17, l 5, citentur fig 10, p 17, l 20, fig 12 l fig 11, p 18, l 11, fig 13 l fig 12, p 19, l 17, tranſmitti l tranſmittit, p 22, l 21 πρὸς τὴν ΒΓ l πρὸς ΑΓ τὴν ΒΓ, p 23, l 6, incidentes (radios l incidentes radios, p 23, l 19, S B protracta l S B (protracta, p 28, ambages. I. Demonſtratæ proſtant l ambages demonſtratæ proſtant. I. Ut in Parabola, p 29, l 25, citentur fig 29, p 29, l 30, puncto divergentium tanquam l puncto divergentium radiorum reflexi rurſus divergunt tanquam, p 29, l 32, ſuo l ſeu, p 32, l 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, p 33, l 4, citentur fig 36, ibid. l 6, citentur fig 37 & 38, p 38, l 28, I q. R. A B. I l I q. R. & A B. T p 40, l 17, Se l Si, ib. l 31, quoquam l quaquam, p 41, l 24, aberoque l adeoque, p 45, l 7, recitſimi l rectiſſimi, ib. l 8, procriores l propiores, p 47, l 24, reſignare l deſignare, p 48, l 1, Z 2, l 2. ib. l 12, Nocetur ſi fuerit H N P l Notetu ſi fuerit H N ω, p 57, l 4, ejuſce l cujuſce, p 65, l 4, exiſtimari l exiſtimare, ib. l 22, ipſe l eſſe, p 67, l 13, interjaceret l interjacet, p 70, l 3, poſteribus l poſterioribus p 71, l 32, Adverſatur l Advertatur, p 71, l 15, γ S γ v l γ S. γ v. p 78, l 1, in eodem l eodem, p 89, l 25. ratiori l rationi, p 90, l 17, expanſem l expenſam, p 95, l 14, reiect onibus l reflectionibus, ib. l 40, Sirus l Simus, p 96, l 3, ſi nplicime l ſi nplicitſime, p 97, l 2, quæſitam l quæſitum, p 105, l 28, Peſito l Poſito, p 112, l 26, admudum l ad modum.

Lectio I.

NOvum jam ingrèdior dicendi campum, amæniorem ſanè neſcio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) neceſſariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione, ſeu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum ſpecies. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta poſſit, & reverà produci. Poſſunt autem, qui ſaltem hactenus uſurpati ſunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum ſe mihi jam cogitanti ſuggerentia ſunt hæc; *per motus locales*; *per interſectiones magnitudinum*; *per quantitate poſitionéque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias*; *per ductus magnitudinum in magnitudines*; & *per applicationes magnitudinum ad magnitudines*; *per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum*; *per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis*; *per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & ſi qui ſunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo ſupponant oportet, utpote ſine quo nil procreari poteſt, eſt iſte, *qui per motum localem*. De quo proinde primo diſpiciendum. De motu celebratur illud *Ariſtotelis* effatum, ἀγνοῶν ἀγνοεῖται ἀνάγκη (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὰ φύσει: ignorato motu neceſſariò naturam ignorari, in Phyſicis ideò paginam utramque facit, nec immeritò, cùm in natura (ſaltem quantùm humanus intellectus aſſequi valet, aut experientia commonſtrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non abſque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione, de cauſis, de differentiis complura ſubtiliter argutantur Phyſici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 *Phyſ. 1.*

vel cura. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimum à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet θεωρήματα quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditius fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet, agyrtæ ſecùs futuri quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantum potero ἀποδειχθῆναι defugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Aliæ verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere, fuiſſe eum hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe, ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis una oriri ac occidere, ſimulaneoq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt, ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, *inæqua* fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter durâſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro-

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coexiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ita prius mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo prius in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantum ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intereedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimè dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magis quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perdurâſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magis perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ita per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ita motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ αὐτὸν μηδὲν
Phys. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι
χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, Φανερὸν ἐστὶ οὐκ ἐστὶν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. Interim verissimum illud, ὅσον ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse, neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, perque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimis *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli,*
Gen. 1. 14. *& dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quod à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certò ac exquisitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujuſvis horodeictici, ſatis accuratè conſtructi, motibus conſentire. Talis enim machina è fabrica ſua comparata eſt, ſecundum motûs ſui repetitiones ſuccedaneas, æqualiter moveri, *Clepſydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ deſtinatam, & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem ſuam, & figuram, vimque deſcendendi prorſus eadem manet, nec non vaſculum continens, & meatus ipſam tranſmittens haud omnino variantur, tantillo ſaltem tempore, perque temperiem aëris conſimilem, nec ideò cauſa ſubeſt ulla, cur non æquales in ſingulis effluxibus motus obire concedatur; ergò ſi compertum ſit, Solares motus, ſeu quoad integras periodos, ſeu quoad partes ipſarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquiſitè congruere, meritò pronunciandum eſt, eos prorſus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo diſcurſu liquere videtur, id quod forte non nemini mirum videatur, cæleſtia corpora non eſſe, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis menſuras; aſt illos potiùs motus, qui prope nos ſenſibus obverſantur, & experimentis ſubjacent noſtris, cùm horum ope cæleſtium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipſe Sol temporis idoneus judex, aut teſtis *ἀψευδὴς* eſt, niſi quatenus horariæ machinæ ſuffragio veracitatem ſuam adteſtatur. Nec ſanè, quod obiter interpono, poteſt ullo pacto ſciri num periodi ſyderum ante multa ſecula tranſcurſæ noſtri ſeculi revolutionibus omnino pares fuerint, nemo ſcilicet aſſerat certò *Methuſelam* illum qui tantum non mille vitæ tranſegit annos, eo fuiſſe reverâ *μακροβιώτερον*, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, ſi Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos ſuas evolverat? Quid ſi tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipſa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum noſtri temporis inſtrumentis comparata fidem ſuam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, exiſtimâſſe dicitur Solem initio dies longè prolixiores effeciſſe. Sed minùs id rationi conſentaneum videtur, quia tales motus vertiginoſi ſenſim elangueſcere potiùs ſolent, quàm invaleſcere. Verum obiter hæc, & vix ſerio, revertamur in orbitam. Temporis (ſeu permanentiæ rerum in ſuo eſſe, ſtatu, motúve) quantitas, ut dictum eſt, à motu quolibet dignoſcitur, bene notorio, æquabili, (ſeu quoad partes ad hoc adhibitas ſibi conſtanter æquali ac ſimili) dein ſecundario è quibuſvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correſpondent, è cæleſtibus imprimis, Solis potiſſimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora ſint, in quibus eadem clepſydra ſemel ac iterum, vel æquè multis viſibus exhauritur, aut in quibus eadem,

eadem sydera periodos easdem, aut ejusdem periodi partes æquales absolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus similiter, seu proportionaliter inæquales periodi consumuntur. Neque quisquam objiciat tempus communiter haberi pro mensura motûs, & consequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adsumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, sed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obstat quo minus tempus & motus hæc sibi mutuò præstent officia. Sanè veluti spatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum sit discimus, è spatio posteà reliquas ei congruas magnitudines æstimamus; ita tempus primo taxamus è motu quodam, posteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil est aliud quam mediante tempore motus alios cum aliis comparare; sicut & mediante spatio magnitudinum inter se rationes investigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quam ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum simul decursorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Aristoteles*: ἡ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀπὸ κ. τῆς κινήσεως ἡ χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut ostensum, est quantum uniformiter extensum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus respectivis, seu spatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione respondent, possit id quam optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræsentari, hoc est menti nostræ seu phantasiæ proponi; per simplicissimas præsertim, quales sunt linea recta, & circularis; quibuscum etiam & tempore similitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino similares, rationi consentaneum est ipsum velut unicâ dimensione præditum quantum considerare; ipsum enim velut ex simplici supervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur, & solam proinde longitudinem ei solemus attribuere; nec ejus quantitatem alias quam ex lineæ decursæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti censetur vestigium, à puncto habens quòd aliquatenus divisibilis sit, à motu verò quòd uno modo, secundum longitudinem, dividi possit; ità tempus velut instantis continuò labentis vestigium concipiatur, ab instante nonnullam indivisibilitatem habens, à successivo fluxu quòd eatenus dispertiri queat. Et sicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum consequente, ità temporis quantitas ab unica consectatur velut in longum expor-

Phys. IV. 18.

exporrecta ſucceſſione, quam ſpatii decurſi longitudo demonſtrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam ſemper deſignabimus, arbitrariè quidem initio ſumptam & expoſitam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis inſtantibus reſpectivis juxtè reſpondebunt, & iis appoſitè repræſentandis inſervient. His de tempore prælibatis ad conſiderandam vim motûs effectivam procedimus, quæ ſanè (quæcunque ſit ejus natura, vel undicunque procedat, nam iſta *Phyſicis* diſquirenda relinquimus) meritò quoque ſeu quantum quid concipitur, & ſicut alia quanta computo ſubjicitur. Etenim experientiâ compertiſſimum eſt, ſæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, ſeu majus eodem tempore ſpatium confice re. Nec aliunde poteſt hoc procedere, quàm à majori vi, ſeu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujuſque gratiâ velocius dicitur. Et quia perſpicuum eſt nil impedire, quin ſecundum omnimodas proportiones contingat hic ſpatiorum una peractorum exceſſus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaſlibet (quas & ſicuti partes cujuſcunque qualitatis intenſivas ſuccinctæ diſtinctionis ergò gradus appellare licet, & conſuetum eſt) in partes, inquam, quaſlibet infinitas, aut indefinitas diviſibilis concipiatur; quas inter ſe nectens, & à ſe dirimens communis terminus, vel (juxta ſuppoſitionem quòd quanta conſtant ex infinitis atomis) pars abſolutè minima dicatur quies, hoc eſt ſumma tarditas, aut infima velocitas; è cujus ſuccreſcentia, vel intenſione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appoſitione, vel motu, tempus ex inſtantium ſucceſſione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem abſolutè conſiderando, quo vis hujuſce quantitas menti ſeu phantaſiæ rectè proponatur, ſufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc eſt talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibetque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) ſimplicitatis adeò perſpicuitatiſque causâ cuilibet ejus repræſentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in ſe generatim & abſoluta ſpectata vis iſta tempus non implicat, eóque ſecluſo concipi poteſt (in quolibet enim temporis inſtanti, perque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æſtimio Mathematico ſubdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum ſpatio tempus adſignificat, è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac diſcernitur definiturque idcirco velocitas potentia, quâ mobile ſpatium aliquod in aliquo tempore pertranſire poteſt. Unde conſectatur ſingularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non nisi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimo ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant amplius exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conſtarum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt, cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali

velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatiolum longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas, nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeoque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit; quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut prænonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales, aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut prius etiam insinuatum est, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independenter à se invicem ac impermixtè, itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coincidat, hoc est in situ parallelo, quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet, cujus superficiei partes cùm respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis, quòd si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessario sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeoque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur instantaneus,

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus, quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat, aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem prius expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam, ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori conFig. 1. venientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates, & vicißim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia, ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari, contràque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum, vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum, nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet, alioqui cùm ſin-

singillatim spectantur, nihil refert quinam angulus situatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ potissimus sponte consectantur, ut nullam aliam demonstrationem requirere videantur. Et sanè quoad omnes Mathematicæ [illegible] subditas (hoc est utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perspicere, tum summo eadem compendio demonstrare poterit, quisquis contemplationi suæ subjecta cujuscunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd si porrò velocitatis gradus continuò per singula temporis instantia supponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, seu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; consimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis superficiem æqualiter à puncto crescentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè passu decrescentem, exhiberi; simplicissimè verò, & optimè per triangulum rectilineum, ut puta per triangulum AEY, in quo crus AE tempus denotat, ejusque punctis applicatæ lineæ parallelæ BY, CY, DY, EY gradus velocitatis singulis instantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ EY repræsentatum æqualiter increscentes, vel ab eadem EY retrò ad punctum A quietis repræsentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona ABY, ACY, ADY, AEY per respectiva ab initio tempora decursis spatiis repræsentandis inservient. Et consequenter, si velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum supponatur augeri, vel diminui, repræsentabitur tam aggregata velocitas, quàm spatium ei respondens à figura quadrangula Trapezia, qualis est CYYE, in figura priùs adhibita. Hinc, non secùs quàm in præcedentibus, hujusmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facilimè deprehendentur, atque demonstrabuntur, cujusmodi sunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale spatium per motum à quiete uniformiter accelerandum, ac per ipsum motum uniformem, modò velocitas hujus subduplo sit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd spatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, sese habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diversos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis transacta spatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et similia talia vel his connexa, vel indè consequentia, quæ triangulis conveniunt inter se quoad suas, & quoad laterum rationes comparatis, quæ ex positis haud difficilè perspiciantur, ac demonstrentur. Fig. 1.

stratur. Porrò, non absimiliter si velocitatis gradus continuâ per singulâ temporis instantia successione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, crescere concipiantur, aut decrescere juxta progressionem numerorum quadraticorum repræsentatur tum optimè velocitas aggregata, sicut & spatium hujusmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis est A E X, cujus vertex A quietem (seu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, lineæ B X primum velocitatis accrescentis gradum (qui se habet ut 1.) proxima C X secundum gradum (habentem se ut 4.) subsequens D X (qui se habet ut 9.) & ità porrò usque ad ultimum E X: Id quod ex notissima parabolæ proprietate manifestum est. Eodem planè modo quivis suppositi velocitatis gradus, utcunque crescentis aut decrescentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræsentatricem rectam applicatas certissimo, commodissimòque modo designari possunt; asservatâ quam quis adsignare voluerit proportione, sic ut inde cognitâ spatii repræsentantis dimensione, spatii per motum confecti quantitas faciliùs innotescat; & reciprocè, cognitâ spatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoscendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem posthac dicendorum intellectui necessaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia visum est paullo fusiùs exposita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT.

Lect. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ, quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, φορὰ, & παιφορὰ, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur, seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus, sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia vero penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam, ut *v. g.* Quod punctum *in linea recta, circulari, elliptica, spirali, vel alia quavis præstituto queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quod punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem sibi procedere possit, ut situm interea parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies, quales sunt in plano *Superficies parallelogramma* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ita dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismatica, Cylindricæque*, tum quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eándem superficiem delinearí, omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere, nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem ablinc brevitatis ergò tam in his, quam in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me, *Genetricem* dici, alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B, & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C perrigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit, describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma, quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi sunt parallela, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hic singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales, cum integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentius & fusius differemus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quod si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singulæ rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, πολυγωνῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix* fuerit *linea circularis*, aut *elliptica*; latiore verò sensu talis, si curvâ fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas, æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes, quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelas deportari. Quomodo singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis rectæ

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonſtratum eſt, unde ſi ſuperficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam ſeu genetricem, ſeu directricem (quam ubique ſitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo ſecetur, ſectio communis duabus rectis parallelis conſtabit æqualibus inter ſe. De Superficiebus autem ità progenitis obſervatu dignum eſt (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, ſed & generales nonnullas ipſarum affectiones è diverſis reſultantes generandi modis inſinuare propoſitum eſt nobis) quòd ſi linea directrix recta ſit (ut in figura per literam Z diſcriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ reſpectivis directricis lineæ partibus ſemper proportionales ſunt (ſuperficies nempe B C C B reſpectivis rectis B B:) At ſi linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non ſemper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur, at ſaltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel ſecundum omnia ejus puncta inclinatur, quomodo ſit in cylindri cujuſcunque, laxè vel ſtrictè dicti, recti ſuperficie, quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc eſt omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, ſeve ſubtenſis rectis eſt perpendicularis.) Verum ſi, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt neceſſariò ſuperficies A B B A peripheriis æqualibus B B inſiſtentes inter ſe pares, quia (præterquam in caſu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum ſubtenſis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *inſuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas ſuperficies conantur dimetiri, ſeu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliiſve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique conſimili pacto ſuperficiem quamvis planam directo motu ſibi parallelo progredi, ſcilicet ut prædicto modo, ſingula ipſius puncta lineas rectas deſcribant, inter ſe pares, ac parallelas, vel ut ejus ſingulæ rectæ (id quod indè confectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant, cujuſmodi motu deſcribuntur priſmatica quæque cylindricâque corpora, illa nimirum ipſa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúſque ſimili jure poſſunt adaptari, quæ Superficiebus iſtis oſtendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipſorum, & ipſa corpora lateribus ſuis (ſeu directricis rectæ partibus reſpectivis) proportionantur. Quòd & ſi definita hujuſmodi corpora

Fig. 6.

planis

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim *δυσδιήγητα* consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, *seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdèm circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satis facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum, & verticum, & turbinum, & in ipsorum fortasse syderum, motibus adparet.* Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, B C B,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua geneſi colligitur circulorum, & ſectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac ſimilibus, conſtare tot numero quot radius puncta habet, quarum proinde calculum inundo circularis areæ talis qualis dimenſio quam facillimè reperitur, id quod non eſt hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam ſupponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protenſam, uno manente fixo ipſius puncto circa deſignatam quamvis in alio plano conſtitutam lineam, curvam aut è rectis compoſitam, revolvi, ſic ut
Fig. 8. ei nempe lineæ ſemper inſiſtat, vel eam quaſi lambat, aut perſtringat. Sit, exempli cauſâ, linea recta A B indefinitè protenſa, & in ea fixum punctum V, & per V ſemper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujuſmodi motu producetur curva Superficies (è planis ſaltem compoſita, quam & generali ratione, poſt *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem ſi linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; ſin circularis fuerit, aut conicarum ſectionum aliqua, Superficies evadet ſtrictè *conica*; ſin alterius generis aliqua, conica ſaltem extenſo latius ſignificatu dicatur; & à quibuſdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas eſt, ex ipſa generatione manifeſta, quòd ſi per fixum punctum V plano ſecetur, communis plani cum ipſa ſectio erit angulus rectilineus. Nam ſi planum ipſam ſecans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipſam non ſecaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano ſecante, quàm in curva Superficie, in plano, ex plani natura, in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos tranſit, ipſiſque proinde coincidit. In hujuſmodi verò motu poſito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (ſeu vertice) ad directricem lineam B C ductæ ſunt inæquales inter ſe, ſatis liquet lineam B C non à linea B delineari, vel perambulari, quia
Fig. 8. lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) ſibi nequeunt congruere, adeóque punctum B progrediens ſupra, vel infra puncta B, E, C cadet, ut nec eâdem inæqualitate ſuppoſitâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu ſuo lineam deſcribet lineæ directrici B C ſimilem (quare linea V B ſupponitur indefinitè protenſa) at verò ſi lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci poſſunt (quas Superficiei propoſitæ latera nuncupemus licet) proportionaliter ſecentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo ſita eſt B C, parallelo) diviſionum

ſionum puncta lineam conſtituent, ſaltem ad lineam conſiſtent, ipſi BC ſimilem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, ſint communes plani VBD cum planis BC, GH ſectiones rectæ BD, GH, hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iiſdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL ſunt æquales. Item ſe habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis eſt illi, quam habet VD ad VK (ſimilia quippe ſunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD. DE :: GK. KL. ergò omnes ſubtenſæ in GH proportionales ſunt ſubtenſis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ ſibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ ſibi adjacent in altera. Ergò ſecundum ſuperiùs inſinuata lineas BC, GH ſimiles eſſe conſtat. || Hinc etiam patet lineas curvas ſimiles BC, GH eandem ad ſe proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta ſita, latera VB, VG. Quum enim ſubtenſarum iiſdem angulis incluſarum (ut BD, GK, vel DE, KL) ſingulæ rationes æquales ſint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc eſt tota BC) ad omnes conſequentes conjunctas (hoc eſt totam GH) ſe habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum ſuperficierum emergit hæc proprietas, quòd interceptæ ſcilicet à parallelis ad BC planis, à vertice deſumptæ, quibuſcunque lateribus iiſdem incluſæ partes ipſarum ſint inter ſe ſimiles; ut puta Superficies BVC, GVH, & BVD, GVK. (Quod ex generali ſimilitudinis doctrina poſthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex ſimilitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúſque conſimili Superficierum generatione ſatis elucéſcit; ſaltem ex triangulorum VBD, VGK, & VDE, VKL, & talium omnium ſimilitudine ſatis conſtat; ſiquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies compoſita cenſeatur.) Unde ſimilium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diverſis lateribus Superficies, eas inter ſe comparando, notandum eſt quòd baſibus ſuis, ſeu directricis lineæ reſpectivis partibus non ſemper proportionales ſunt; at ſaltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera ſunt æqualia inter ſe, adeóque cùm linea directrix eſt peripheria circuli; quo caſu producta Superficies erit conica Superficies ſtrictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd ſi directrix BC ſupponatur e. g. peripheria circularis, lateráque ſibimet inæqualia, ſi

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur BC in partes æquales, & connectantur latera VD, VE non erunt Superficies BVD, DVE, EVC æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione, juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales, id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetienda cuni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta VB ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam BC perambulet, etiam punctum G parallelo ad BC motu delata, lineam GH ipsi BC similem describet. Quinimò si consimili pacto curva BC, directo quoad lineam rectam BV motu sitúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes, hoc est ità ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, seu basi, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia sympetomata satis è dictis elucescunt. Nempe quòd à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similesque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ex conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* determinatur, ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*, ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eóque pacto *cùm integra cum suis Curvis Superficiebus Solida magnitudines innumeras, tum ipsorum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur.* Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V *a δ*, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A *a*, B *c*, C *γ*, D *δ*, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quòd integra peraganur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y; quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ *δ* V K, constituetur Solidum è sectoribus A Z *a*, B Z *c*, C Z *γ*, & reliquis inter se similibus. Cæterùm prætermittenda non est animadversio quædam, perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò rite adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non semel, in peregrudito suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello*, doctissimus *A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & sphæroarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectum conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur. Fig. 9. Fig. 10, 11, 12.

K

ponitur ipſum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios deſcriptis ipſe *conus* conflatur. Ergò, diſputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adverſari; methodúſque proinde fallax eſt. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* conſtant computatione diverſam inſtituendam eſſe rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana ſuperficies* conſtant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam conſtituentium è revolutione prognatam lineæ V D cenſeri debet è multitudine punctorum, quæ ſunt in ipſa
Fig. 10, 11, 12. linea genetrice V D; quippe cùm per ea ſingula puncta tales peripheriæ tranſeant, nec plures tranſire queant; quicunque ſit axis, ſeu longiùs diſtans, ſeu propiùs adjacens; axis enim ſolummodò, pro longiore vel propiore diſtantia poſitioneque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K ſupponitur conſtare, planorúmque quibus Solidum D V Y conſtat, è numero taxanda eſt punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipſi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci poſſunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod obſervando *diſcrimen* (ſedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujuſmodi rotatu genitarum Superficierum facilimo, rectè, omnium quas rei natura ſubminiſtrat modo perquiremus.* Illum commonſtrabo. Pro reperienda v. g. dimenſione *curvæ ſuperficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipſa V D in directum extendi, ità ſcilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicati ipſi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; ſingulæ ſingulis, puta A X ipſi A Y, & C X ipſi C Y, ac ità continuo. Erit ex his parallelis rectis conſtitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ ſuperficiei*; hujúſque partes illius partibus reſpectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipſarum reſpectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; ſpatium ex his rectis conſtitutum (quæ ſanè proportionali cum alteris ſerie procedunt) ſe habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujuſvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde ſiquâ ratione deprehendi poſſit *Summa radiorum peromnia linea genetricis puncta tranſeuntium* (hoc eſt ſi *ſpatii* V D Z *dimenſionem* reperire contigerit) eo ſtatim innoteſcet *curva Superficiei dimenſio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

plicentur rectæ AZ, BZ, CZ, DZ ad ipſam VD perpendiculares, & æquales ſingulæ ſingulis in cono circulorum radiis per eaſdem literas deſignatis; fiet autem in hoc caſu *Spatium* VDZ triangulum, quia rectæ AZ, BZ, CZ æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium eſt. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine VD & baſe DZ, dimenſio in promptu eſt. Quod ſi fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipſius, ità triangulum VDZ ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propoſitæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaſlibet hoc modo natas) inveſtigare licet. At mihi propoſitum eſt generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum geneſin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iſte modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) ſimiles innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta ſe ſitu diſpoſitæ taliter conſtituuntur, ut ſingulæ centrum ſuum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem ſubit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam conſiſtunt; quæ propterea dicitur ipſorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* exiſtunt. Sed cùm motus ità diſtortos natura non capiat (ſaltem juxta modum operandi ſimplicem quem nunc ſupponimus) & quia poſſunt hujuſmodi magnitudines ut modis aliis genitæ facilius concipi, de iis abſtinebimus. Neque non de magnitudinum per motus ſimplices effectione ſufficiet hactenus diſſeruiſſe. ||

LECT.

Lect. III.

QUomodo per *motus ſimplices progreſſivum, & converſivum effecta concipiantur magnitudines, & qualia generationes iſtas conſequuntur ſymptomata* (nonnulla ſaltem præcipua) *conniſi ſumus exponere ad compoſitos nunc, & concurrentes, eidem propoſito ſervientes, motus accingimur*; quorum in effectis diſcernendis velocitates, ſecundum quas ſimplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis conſiderandæ ſunt; quarum in generatione per motus ſimplices nulla prorſus habetur ratio. Per eundem enim motum ſimplicem ſeu velocior is ſit, ſeu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejuſdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eò magis aut minus expectandum ſit, quo ſegnior aut citatior ſupponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compoſitos iiſdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum ſpecie, ſed etiam quantitate diverſæ magnitudines emergere ſolent, poſitione ſaltem perpetuò differentes. Ut ſi recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & ſimul punctum M in A B deſcendat uniformiter; vel ſimul recta A C parallelo quoque uniformi motu deſcendens ipſam A B promotam interſecet in M; ex ejuſmodi motuum compoſitione vel concurſu producetur recta linea A M. Quòd ſi eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C ſecet ipſam A B in μ, deſcribetur hoc motu alia recta A μ à priore A M poſitione diverſa. *Sin verò*, manente rurſus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi ſubſtituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejuſmodi compoſitione, vel concurſu fiet linea

Fig. 13.

parabolica

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quod si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodèque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelos, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelos ad primò positam AB, vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ, vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compoſitionem ab ipſorum concurſu ſecerno, quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modo faciliùs explicatur. Verum ad illos diſtinctius exponendos accedo. De compoſitione primum. Cùm autem motus duobus modis compoſitus intelligi poſſit, vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de poſteriore nos diſſertamus; quem fortè non meliùs quam prænobilis Philoſophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Carteſ. prius. II. 31, 32. "Etſi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum ſibi proprium, quoniam ab unis tantùm corporibus ſibi contiguis, et quieſcentibus recedere intelligitur, partiçipare tamen etiam poteſt et de aliis innumeris, ſi nempe ſit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut ſi quis ambulans in navi *horologium in* pera geſtet, ejus horologii rotulæ unico tantùm motu ſibi proprio movebuntur; ſed participabunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus adjunctæ ipſi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipſi terræ, "ſiquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera erunt in rotulis iſtis, ſed quia non facilè tam multi ſimul intelligi, nec etiam omnes agnoſci poſſunt, ſufficiet unicum illum, "qui proprius eſt cujusque corporis in ipſo conſiderare. Ac præterea ille unicus cujuſque corporis motus, qui ei proprius eſt, "inſtar plurium poteſt conſiderari; ut cùm in rotis curruum duos diverſos diſtinguimus, unum ſcilicet circa ipſarum axem, et "alium rectum ſecundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non ſint revera diſtincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tantum aliquam lineam deſcribat. Nec refert quòd iſta linea ſæpe ſit "valde contorta, et ideò à pluribus diverſis motibus genita videatur, quia poſſumus imaginari eodem modo quamcunque lineam etiam rectam, quæ omnium ſimpliciſſima eſt, ex infinitis diverſis motibus ortam eſſe. Ut ſi linea A B feratur verſus "C D, et eodem tempore punctum A feratur verſus B, linea "recta A D, quam hoc punctum A deſcribet, non minus pendebit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto deſcribitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis ſæpe utile ſit unum motum in plures partes hoc pacto diſtinguere ad facilioremejus perceptionem; abſolutè tamen loquendo unus tantùm

Fig. 16.

in

«in unoquoque corpore eſt numerandus. Ita *Carteſius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps eſt, ut ab eo quoad ſitum ſuum aliquatenus determinetur, iſte motus hujus compoſitionem quaſi pars ingreditur, ab exemplis poſthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi poſſunt *Progreſſivi* cum *Progreſſivis*, *Progreſſivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi poſſunt, inquam, et decomponi modis innumeris, quorum omnium cùm inire cenſum impoſſibile ſit, illoſque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile ſit, exponere difficiliùs, nos præcipuos ſaltem aliquos, in uſu magis poſitos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis ſunt ii qui è motibus directis et parallelis, è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur, præſertim illi quos qui conſtituunt ſimplices motus omnes vel nonnulli ſunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Reſpublica requirit, ac exigit Eccleſia, ſed artes etiam atque ſcientia vehementer affectant.* Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum ſibi non immeritò locum aſſerunt, ut ſimplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac uſitati. Nec ulla ſanè magnitudinis eſt ſpecies (nulla linea, nulla ſuperficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano conſtituta linea procreari poteſt è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis ſuperficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo (lineæ ſcilicet alicujus è rectis modo jam inſinuato motibus progenitæ) conſequenter et linea quævis etiam in curva ſuperficie deſignata rectis motibus effici poteſt. Corpus autem ſolidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è ſuperficierum genitura reſultat, et quatenus ab iſtis ità genitis terminatur, ac circumſcribitur Sed quia *ſuperficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Matheſis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam ſuccurrit animadverſione dignum quod de iis dicam, de linearum ſaltem in uno plano exiſtentium, per rectos et parallelos motus generatione diſpiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla eſt quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur, verum hi motus eo contemperari modo debent, quem ſpecialis lineæ producendæ natura poſcit, nec refert qualem, velocitatis reſpectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e.g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes eadem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B. A C :: B M. C μ. vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secus; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus, agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelisſimum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimis methodi cauſâ repeto ſi recta AZ per rectam AY ſibi perpetuo parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia AB, AC ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundo punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur interea, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per AY et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. Fig. 18. Fig. 19.

L. Hoc-

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuò crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu compositò transverso per BC (vel huic parallelam MG) & descendente per AZ, uniformi utroque; transversus autem per MG est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita MNO describitur; patet velocitatem descendentis motûs uniformis rectam MN gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam MNO describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illo, cùm continuò crescere ponatur, in toto tempore descensus per GN illo tardior fuisset, adeóque nunquam eodem tempore spatium æquale transegisset, nec una cum eo pertigisset ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increscens per tempus motûs uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus spatium emetitur, quàm uniformis motus descendens, quo MN. ad K protractus describitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quam à minore neutiquam crescente) quare linea HO major est quam HK; adeóque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibusvis lineæ MNO punctis conveniat, absurdè patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis descendentis, quo curvæ MNO subtensa quævis (ut MN) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejúsque arcus fiunt, minor est velocitate. quàm motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ *subtensa* quælibet (ut MO) intra *suum arcum* (versus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* l. 8. Nam si sumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, si producatur, extra lineam MNO cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, uti mox ostensum.||

Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides*, *de sectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, ſive convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quam a nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari, nec alio recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſuſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY, quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; præterque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantum puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpeciatim oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* l. 16. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcenſûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet, nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum.

larum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

l. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius*. l. 24, 25.

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam AZ ſecantes (infra punctum A, ſupràque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi AZ parallelas ſecent etiam infinitè productæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtrationi in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*. l. 27, 28.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipſi AZ parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius AY partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelo mota retrogradè (à D puta verſus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M recta PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eóque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti deſcendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ ſe habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipſum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu deſcripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti deſcendentis à T per TZ; & ſit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva deſcribitur; cùm TZ eſt in ſitu KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T deſcendens fuerit in K, erit punctum ab A deſcendens in curvæ cum KG interſectione O (nec enim, ut anteà deductum eſt, alibi recta KG curvam ſecat) eſt autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota verſatur. Jam ſi punctum K ponatur ſupra contactum verſus T, quoniam tum OG minor eſt quàm KG, liquet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva deſcribitur, in curvæ puncto O minorem eſſe velocitate motûs uniformis deſcendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa ſemper increſcens eodem tempore (per GM repræſentato) minus ſpatium tranſigit, quàm hæc minimè creſcens; aſt eadem continuò perſeverans, illa ſcilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero ſi punctum K infra contactum ad partes S exiſtat, quoniam OG tum major eſt quàm KG, patet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva fit, in puncto O majorem eſſe velocitate motûs uniformis itidem deſcendentis, quo tangens efficitur; quia motus iſte, continuò decreſcens eodem per GM tempore, majus peragit ſpatium OG, quàm hic minimè decreſcens, at in eodem tenore perſiſtens, conficit, ipſum nempe ſpatium KG. Ergò cùm velocitas curvam deſcribentis puncti quovis in curvæ puncto ſupra contactum verſus A minor ſit velocitate motûs per TP, quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipſo contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus converſa, conſimili diſcurſu, rem breviùs exponendo, demonſtretur. Nempe, ſi velocitas puncti deſcendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP deſcriberet tempore PM vel AC (vel ſit velocitas motûs deſcendentis ad M ad velocitatem motûs tranſverſi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam ſumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam verſus partes AT velocitas aſcendentis puncti, curvam efficientis, ſemper decreſcit ab M ad O, illi verò ex hypotheſi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decreſcit ab M ad K, ſitque tempus MG commune, erit ſpatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia verſus alteras partes, velocitas deſcendentis, quo curva fit, increſcit ſemper ab M verſus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud creſcit ab M ad K; idémque ſit rurſus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K ſupra curvam exiſtere. Quare manifeſtum eſt omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiſtere, & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hiſce ſtatim *conſtat*; *hujuſmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & ſi fieri poteſt altera MX etiam tangat. Ergo eodem tempore, eâdem velocitate (illâ ſcilicet, quæ puncti curvam deſcribentis ad contactum M acquiſitæ velocitati æquatur) deſcribetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergo non tanget altera præter poſitam MT. || *Hanc ſpeciatim de circulo demonſtravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aſpernandum, quòd eâdem operâ *propoſitiones de tangentibus inverſæ demonſtrantur.* Nempe ſi determinetur angulus PMT (vel alter quiſpiam quem recta poſitione data cum tangente facit ad punctum curvæ deſignatum) aut ſi determinetur quantitas rectæ PT (vel ſimilis cujuſpiam alterius à puncto in data poſitione recta deſignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, ſi tangens ſitu determinetur, angulorum atque linearum ejuſmodi quantitas indè dignoſcetur. Adeóque parcetur operæ, qualem inſumpſerunt plerique tales propoſitiones inverſas demonſtrandi. Quod & eo magis obſervatu dignum eſt, quia ſæpe talium inverſarum propoſitionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonſtratur. Cujus obſervationis, niſi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina*.

Euclid. III. 16, 17. Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti deſcendentis velocitates in duobus quibuſvis deſignatis curvæ punctis ad ſe proportionem habere reciprocè com-

compositam è rationibus applicatarum ab istis punctis ad rectam AZ (ipsi scilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad ista puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione subductæ.)

Nempe si duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipsius TP ad PM, & ipsius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY se habet ut TP ad PM, & velocitas ista uniformis se habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Noterur à concursu tangentium ducta FE ad AY, parallelâ, fore TE, XE = TP. PM + QN. QX. Fig. 21.

XV. Obiter interficio generalem hinc & bene facilem consequi *Problematis istius solutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingeniosissimè reperisse. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipse *Galilæus* ad manum non est) propositâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod sublime reperire, è quo si grave cadat usque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipsa *propositam parabolam* describat (notetur, quod motus descensivus parabolam describens non è puncto sublimi, sed ab ipso puncto A censetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* suppositis insistendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, seu transversi, & æqualiter crescentis descensivi quorum è compositione descripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque sit crescentis descensivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur, specialem illum de *parabola* casum in exemplum subjuncturi. Fig. 22.

Reperiatur in recta AZ (quæ sinè curvæ diameter est) punctum aliquod, ut P, à quo si ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, sit intercepta TP æqualis ipsi PM; sumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile descendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam describendo (ponitur enim increscentis velocitatis motus utrobique prorsus idem) iste verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T descendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

lata, pérque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. Fig. 22. | Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ita facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *data parabola rectum latus*. Est igitur ex *parabola* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypotheli modi nostri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4APq$. Ergo est $R \times AP = 4APq$. Adeóque $R = 4AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quòd si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq \, AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur à vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3}TP$) est TP cub. $= 27AP$ cub. Erit igitur $RqAP = 27APq$; adeóque $Rq = 27APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus, huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem basi constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP, TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

Ut si ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana superficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ AD punctis B, C, similitérque dictâ rectâ $\alpha\delta$ punctis ζ, γ, fuerit ut BM ad CM ità superficies $\zeta\alpha\mu$, ad superficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat, *complexo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *se habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut superficies* $\alpha\delta\mu$ *ad parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim si recta $\alpha\delta$ commune tempus designare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato transiguntur, recta $\delta\mu$ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam TP. Cùm igitur, ex hypothesis præstitæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræsentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP; cognitaque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet, & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Propositâ curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ BM, CM se habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc est ut quadrata ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$. Ergò si figura $\alpha\delta\mu$ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula $\zeta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$, hoc est rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ est subduplum, erit recta AP quoque rectæ TP subdupla, quod ità se habere demonstratum habetur in *cujusvis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva AMM *parabola cubica*, & quoniam in ea rectæ BM, CM se habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc est ut cubi rectarum $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$; & si *superficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimedea parabolæ dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*, cumque constiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ subtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta AP quoque subtripla rectæ TP. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24. *Hæc posthàc manuductionis demonstrata habentur.*

XVII. Huic ſuppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc eſt ad ejus ſingula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD conſimiliter diviſam applicatarum differentiis proportionales, reſultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque baſin poſitum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut ſi rectæ AD, $\alpha\delta$ ſimiliter (in partes ſcilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ ſunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales ſint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus ſeipsâ minorum differentiis (ipſis nempe BM, NM, OM) & trilineum $\alpha\delta\mu$ conſtituatur è rectis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione creſcentibus; ut & recta CM æquatur ipſis BM, NM; & ei reſpondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quaſi conflatur è parallelis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione creſcentibus; & hoc ſemper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\zeta\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hic rectas $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræſentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in reſpectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita reſpectiva temporis inſtantia; quibus (ut jam olim præmonitum) reſpondentia ſpatia BM, CM, DM proportionantur.

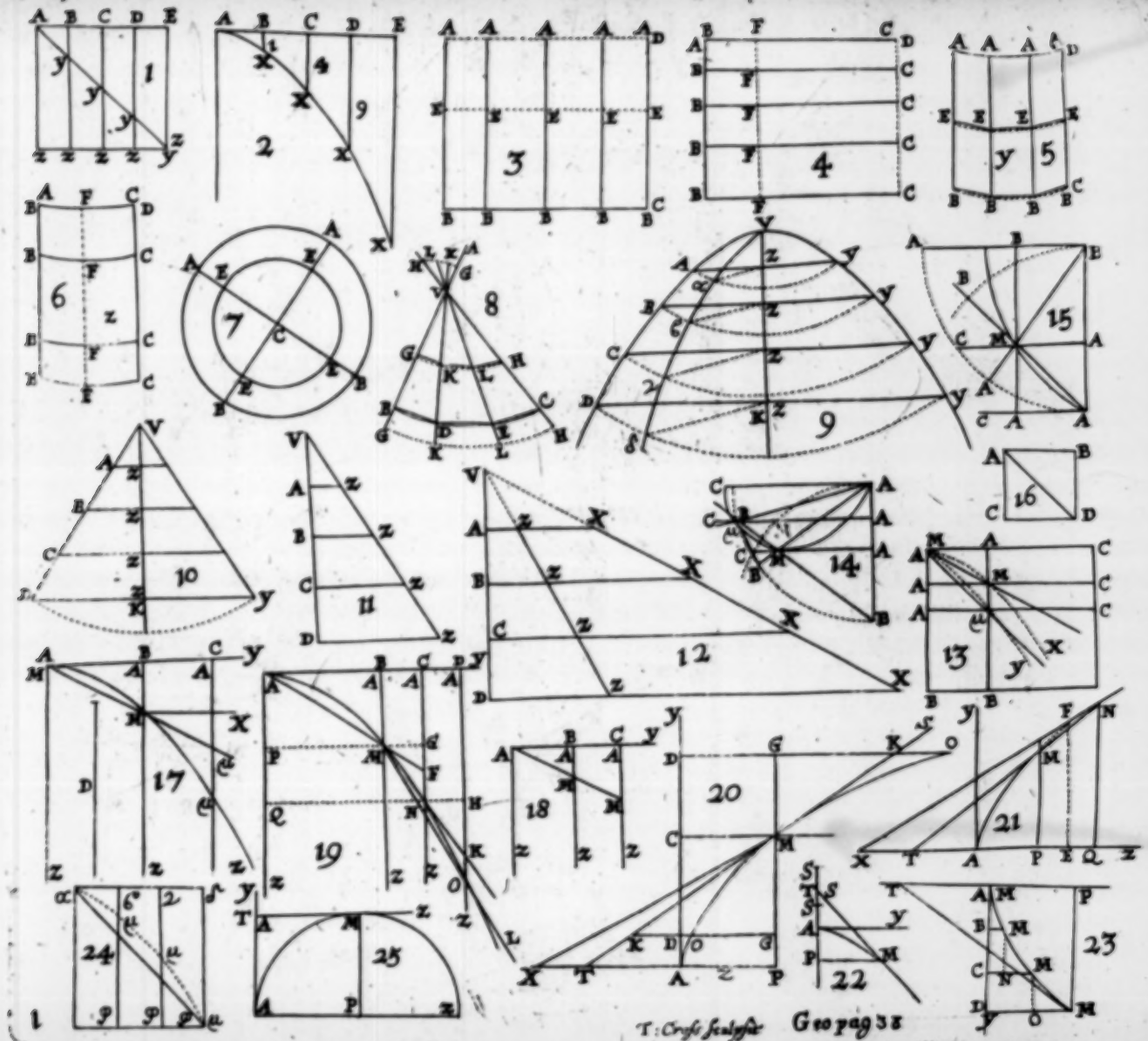
Fig. 23, 24.

XVIII. E ſupradictis porrò conſectatur, quòd ſi *Circulus*, *Ellipſis*, ejuſmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas deſcribens infinitam in recurſûs puncto velocitatem habebit. Nempe ſi quadrans AFM ità generetur; quoniam tangens TM diametro AZ eſt parallela, nec illa proinde cum hac niſi ad infinitam diſtantiam convenit; ergo velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY ſe habebit, ut infinita recta ad ipſam PM; unde velocitas iſta ad M prorſus infinita ſit oportet. Ità quidem quoad hujuſmodi curvas; at quoad alias ad infinitum ſenſim continuatas (quales *parabola* & *hyperbola*) deſcendentis puncti velocitas in quovis deſignato curvæ puncto finita eſt. Verùm his omiſſis ad alias propoſitæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.

Fig. 25.

II. *præced.*

LECT. V.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
T. Cross Sculpsit
Geo pag 38

Lect. V.

IN deducendis è propoſitâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diverſa curvæ puncta, ſibimet inæquales ſunt; & minores ſunt illi qui puncto A (ſeu vertici) propiores ſunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ ſint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipſi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipſa XN ſecabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifeſtum eſt autem cum puncta H, N ſint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH ſeſe interſecare inter parallelas PH, QE; quare major eſt angulus externus QNX interno QET, hoc eſt angulo PMT: Q.E.D. Fig. 16.

II. Hinc *pariſmatis* loco habetur *tangentes ſe interſecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protenſas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem eſſe*; (externum ſcilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quaſvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quam remotiores.

Cæterùm iſta jam olim de *Sectionibus Conicis* oſtenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* eſt videre

V. In figura præcedente (poſito applicationis angulum TAY rectum eſſe, vel obtuſum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem eſſe; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur ſubtenſa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor eſt recto, erit, eo major externus, NHP obtuſus. Ergò recta NM major eſt quàm NH. Itaque magis arcus, arcus NH major eſt quàm ipſâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang. RNE ipſi XQE par haud minor eſt recto, erit RE ⊏ RN. quare MR + RE ⊏ MR + RN. hoc eſt ME ⊏ MR + RN. Eſt autem (ex *Archimedis* aſſumptis) MR + RN ⊏ arc. MN. ergò magis eſt ME ⊏ arc. MN.

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc conſectatur, ſi arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò ſubſtitui.

Speciminis hic loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 17. Recta AY ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ, cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX ſecans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; inque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, ſecans curvam APX in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta PE ⊐ arc PX. adeóque PA. PE ⊏ arc PA. PX :: PM. PM — XZ :: PM. EH — XZ :: PM. ZH — EX ⊏ PM. ZH. quare permutatim erit PA. PM ⊏ PE. ZH. eſt autem PA. PM :: MR. RS :: MH. KH :: PE. HK. ergò PE. HK. ⊏ PE. ZH. quare HK ⊐ ZH. eſt autem punctum H extra curvam AZM, ob EZ ⊐ XZ ⊐ PM = EH. ergò palàm eſt punctum K extra curvam AZM exiſtere. Sit verò ſecundò

punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA. PE ⊐ arc PA. PX :: PM. XZ — PM :: PM. XZ — EH :: PM. XE + XZ ⊐ PM. HZ. & viciſſim PA. PM ⊐ PE. HZ. Verum ut priùs) eſt PA. PM :: PE. HK. ergò PE. HK ⊐ PE. HZ; propterèaque HK ⊏ HZ; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In tranſcurſu hoc. ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta E F eidem occurret; at curvam priùs tranſiliat oportet. ergò liquet Propoſitum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. *Con. l. 17, 18.*

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet*; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tangentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur ſubtenſa N M; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang O M H ⊐ (ang. T M H = ang. X N K ⊐) ang. O N K. ergo ang. H M N + M N K ⊏ 2 rect. ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari; ſeu alterum alteri fore externum interno. aliis cotnrà eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti M T) & in hac ſumatur quæpiam definita H M; erit H M minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci poſſunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V. 38 &c.*

Ducatur enim quævis HO, hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet HR majorem esse quàm HM, multóq; magis esse HO ⊏ HM,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si HM minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit HM curvæ perpendicularis.

Nam quoniam HM minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis HS, majori quàm HM, curvam secabit, & proinde tangentem MT, hanc puta in R. ergo quum sit HR ⊏ HM, non erit angulus HRM rectus. idem de punctis omnibus in recta TM evidens est. ergo tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta HM minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta TM; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) XM, erit igitur XM ad HM perpendicularis. Unde pares erunt anguli HMX, HMT, totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ HM propiorem HN remotiore HO minorem esse.

Nam ducatur subtensa MN, hæc producta curvam transgredietur, & ipsam HO secabit, puta in R. & quoniam Angulus HMR obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum HM constituit ad M) erit HNR magis obtusus, adeoq; recta HR ⊏ HN & magis HO ⊏ HN.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad easdem puncti M partes puncto curvæ occurrere, nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari HM parallelæ, sint rectæ IN, KO, harum propior IN remotiore KO rectius incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares EN, FO, hæ cum ipsa HM intra curvam convenient, puta ad R, & P, sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. FOK = ang. FPH ⊏ ang. PRQ = ang. NRH = ang. ENJ. Cùm ergò sit ang. FOK major angulo ENJ, liquet propositum. XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectius incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K ⊏ ang. E N I. Item ang. O H M ⊏ ang. N H M. hoc est ang. K O H ⊏ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H ⊏ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H ⊏ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R ⊐ H M. & magis H O ⊐ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. *Apol. V.* 32.

XX. Item si recta H M sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apol. V.* 29.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apol. V.* 30, 39.

Nam si dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M curvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. *Apol. V.* 31, 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. *Apol. V.* 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* introrsum tangat, etiam magis *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si H^M sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit I^M maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus tandem extrorsus continget.* unde constat *Propositum.*

Cæterùm *minimarum & maximarum propior determinatio pendet ex speciali curvæ naturâ.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allaturæ.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

Lect. VI.

AD easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observavam specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuero; promeo more quam concisissimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ comprimis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam* (è simplicioribus nempe vulgatioribúsque perplexiora minúsque perspecta deducendo) *partim circa mediarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quam promptissimè determinandas*; quæ materiæ cum præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ. Quin è vestigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & brevius ostendendis aliquem prospicimus usum, præmittentes.

II. Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, sit item linea O D O talis, ut per D ductâ quivis rectâ D N, sit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénsq; ipsi A B in L, & in protracta B L sumatur L Z = L B, ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob positam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum sit D H. H O :: (D L. L N :: D L — D H.

DH. LN — HO :: LH. LB ::) LH. HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH — HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam O DO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam N DS. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R. S :: LB. LZ; & R. S :: DL. DE, & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbola asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum conflictiones ista Archimedea, ac Vietea ope prima Conchoidis perecta, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus PO Q *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D, sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y,) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L, secentúrque DL, BL punctis E, F, ut sit DL. DE :: X. Y :: BL. BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA, & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z, denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL. DH :: LN. HO :: LB + BN. HO :: DE × LB + DE × BN. DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL. DE :: MN. MO :: BN. KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE. DL :: BF. LB,) erit DL. DH :: DL × BF + DL × KO. DE × HO, hoc est DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO :: DL × BF + DL × KO.

DE

DE×HO ergò DH×BF+DH×KO=DE×HO, hoc eſt DH×BF+DH×HO—DH×BL=DE×HO, tranſponendo igitur eſt DH×HO—DE×HO=DH×BL—DH×BF. hoc eſt EH×HO=DH×FL, vel EH×GO+EH×HG=DE×FL+EH×FL, quare, demptis æqualibus, eſt EH×GO=DE×FL, vel ZG×GO=DE×FL, cum itaque DE×FL ſit quid determinatum, conſtat lineam OBO eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monſtrat; nec abludit modus demonſtrandi. Fig. 40.

VI. Conſectarium. Si recta BQ angulum ABC ſecet, perque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ interſecantes punctis OP (quorum utique ſit O propius ipſi B) erit MN.MO⊐XY.XP. Nam per O deſcripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, ſic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO::(XY.XV)⊐XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo eſt NO.MO⊐YP.PX.

VII. Quinimò ſi plures lineæ BQ, BG angulum ABC ſecent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras interſecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO⊐YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO⊐YF.FV; & EO.OM⊐FV.VX. igitur ex æquo eſt NE.OM⊐YF.VX. ‖

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci poſſe; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam ſumatur PQ=PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad eaſdem; hoc eſt minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rurſum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.

linea

linea OOO talis, ut ſi ad D utcunque ducatur recta DO, ſecans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat DM ad NO ſemper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea OOO hyperbola.

Nam ducatur DL ad BC parallela, ſitque DL. DE :: X. Y, & per E ducatur ER ad AB parallela, ſecans BC in Z; demum per O ducatur OH ad BA parallela.

Eſt jam DL. DE :: DM. NO :: LM. GO (ob ſimilia triangula DLM, NGO) :: LM × DH. GO × DH item DL × HO = LM × DH (ob DL. LM :: DH. HO) quare DL. DE :: DL × HO. GO × DH hoc eſt DL × HO. DE × HO :: DL × HO. GO × DH adeóq; DE × HO = GO × DH. hoc eſt DE × HG + DE × GO = GO × DE + GO × EH quare (communi ſublato) eſt DE × HG = GO × EH, ſeu DE × HG = GO × ZG. Patet itaque curvam OOO eſſe *hyperbolam* cujus *aſymptoti* ZR ZC.

Corell. Si ratio data ſit æqualitatis (ceu DM = NO,) ipſæ AB, CB aſymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magis id perſpicuum videtur, Algebricè monſtrabimus.

X. Eſto poſitione data recta ID, in qua punctum deſignatum D,
Fig. 44. ſit item curva DNN talis ut in ID ſumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ GN ad poſitionem datam IK parallelâ, tum adſumptis determinatis rectis m, b; poſitiſq; $DG = x$, & $GN = y$; ſit conſtantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea DNN *hyperbola*; quæ ſic determinatur; ſumantur DM, & DO (hinc indè) pares ipſi m; & per M ducatur ML ad IK parallela, factóq; $b . m :: m . MQ$; ſit $MZ = 2\,MQ = \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta ZT; erunt ZM, ZT aſymptoti.

Ducatur enim ZS ad MO parallela, cui occurrat NG in R (quæ & ipſam ZT ſecet in P). & connectatur DQ. Eſt ergò $PN = RG + GN - RP$. Verùm eſt $MD . MQ :: ZR (MG) . RP$; hoc eſt $m . \frac{mm}{b} :: m + x . RP = \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$ adeóq; $RG - RP = \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$ ergò $PN = \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde $PN \times MG = \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$ Verùm (ex hypotheſi) eſt my +

$+xy-\frac{mxx}{b}=o$. ergo $PN\times MG=\frac{m}{b}=MD\times ZQ$, vel $PN.ZQ::(MD.MG::)QD.ZP$. Quapropter est $PN\times ZP=ZQ\times QD$. Unde palàm est curvam D N N esse hyperbolam, cujus asymptoti Z M, Z T. Fig. 44.

XI. Notetur, si æquatio sit $my-xy=\frac{m}{b}xx$, eadem habebitur *hyperbola*, tunc solùm puncta G ad partes D M sumuntur. Quin & si æquatio fit $xy-my=\frac{m}{b}xx$, puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipsi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum B D F, & linea D N N talis, ut ductâ utcunque R N ad B D parallelâ (quæ lineas B F, D F, D N N secet punctis R, G, N) connexâque rectâ D N, sit perpetuò D N proportione mediâ inter R N, N G, erit linea D N N *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur D K ad D B perpendicularis (secans ipsam R N in E) & sit F H ad D B parallela; vocenturque $DB=b$, $DF=d$, $FH=f$, tum $DG=x$, & $GN=y$, Estque $d.f::x.\frac{fx}{d}=GE$, unde $\frac{2fxy}{d}+xx+yy=2EG\times GN+DGq+GNq=DNq$. Porrò est $d.b::FG.GR::d-x.RG=b-\frac{bx}{d}$. Unde $RN=b-\frac{bx}{d}+y$. Et ideò $by-\frac{bxy}{d}+yy=RN\times NG=DNq=\frac{2fxy}{d}+xx+yy$. quare $by-\frac{bxy}{d}=\frac{2fxy}{d}+xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y=yx+\frac{d}{2f+b}xx$. quòd si ponatur $m=\frac{db}{2f+b}$, erit $my-xy=\frac{m}{b}xx$. Unde liquet D N N esse *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus D G N rectus fuerit, evanescente tum $f=o$, erit

$d = m$, vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hic (nonnulla forsan πανθυγος) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta ID; sit item curva DNN talis, ut in ID sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ GN ad positionem datam IK parallelâ; sumptisque determinatis lineis g, m, r; positisque $DG = x$, & $GN = y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea DNN erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur ML ad IK parallela; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & sit $QY = MQ$; & ab MY auferatur $YZ = g$; connexâque QD, ducatur ZT ad QD parallelâ; erunt ZM, ZT *asymptoti*.

Nam ducatur ZS ad MD parallela; cui occurrat GN producta in R (sed & GR ipsam ZT secet in P). Estque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + 0. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$, unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam DNN esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* ZM, ZT.

Si æquatio sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ DB, BA; perque rectam DB feratur recta CX ad BA parallela; item per punctum D rotando transeat recta DY, sic ipsam BA secans in E, ut sit inter rectas BE, DC eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad DB) rectæ verò DE, CX se intersecent punctis N; erit linea DNN *Parabola*.

Nam sit $R . DB :: DB . P$. Est ergò $BE . DC :: DB . P$. Item est $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

CN + DB. P. hoc est DB. DC :: DC × DB. CN × P. hoc est DB × DC. DCq :: DC × DB. CN × P. Quapropter est DCq = CN × P, ergò patet *curvam D N N esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. * In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam semper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam bisecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, secans curvam D N N in V, & quoniam est B C. R :: B E. B D :: C N. C D. erit B C × C D = R × C N. ergò (secundum benè notam *parabolæ proprietatem*) est curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta C X non jam ad ipsum B A, sed ad aliam positione datam (D H) feratur parallela, sitque perpetuò B E. D C :: D B. R, erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur D B = *b*. B H = *b*, D G = *x*. G N = *y*. Estque *x*. *y* :: *b*. $\frac{by}{x}$ = BE. item *b*. *b* :: *y*. $\frac{by}{b}$ = GC. quare C D = $x - \frac{by}{b}$. Est igitur (ex hypothesi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{b} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{bry}{b} = \frac{b}{b} xx$. ponendoq; $\frac{br}{b} = m$, erit $yx + my = \frac{m}{r} xx$, est ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ suprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur C X, ut semper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èstque jam B C = $b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

$\frac{by}{b} :: b.r$, unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{br}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. $\times x x$; hoc est (posito $\frac{br}{b} = m$) $yx + bx - my = \frac{m}{r} xx$; Est igitur curva B N N *hyperbola*, qualem superiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ positione sint rectæ D B, B A, (& in D B designetur punctum D) sitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N ad B A parallelâ; sumptis verò determinatis g, r, vocatisque D G $= x$; & G N $= y$, sit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, sic determinanda.

Fig. 53. Capiatur D E $= r$, & B O $= g$, & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ, erunt Z R, Z S *asymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, est Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P $\times$ P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypothesi est $- gx + ry - yx = o$. ergò Z P $\times$ P N $= gr =$ Z E $\times$ E D. undè liquido constat Propositum.

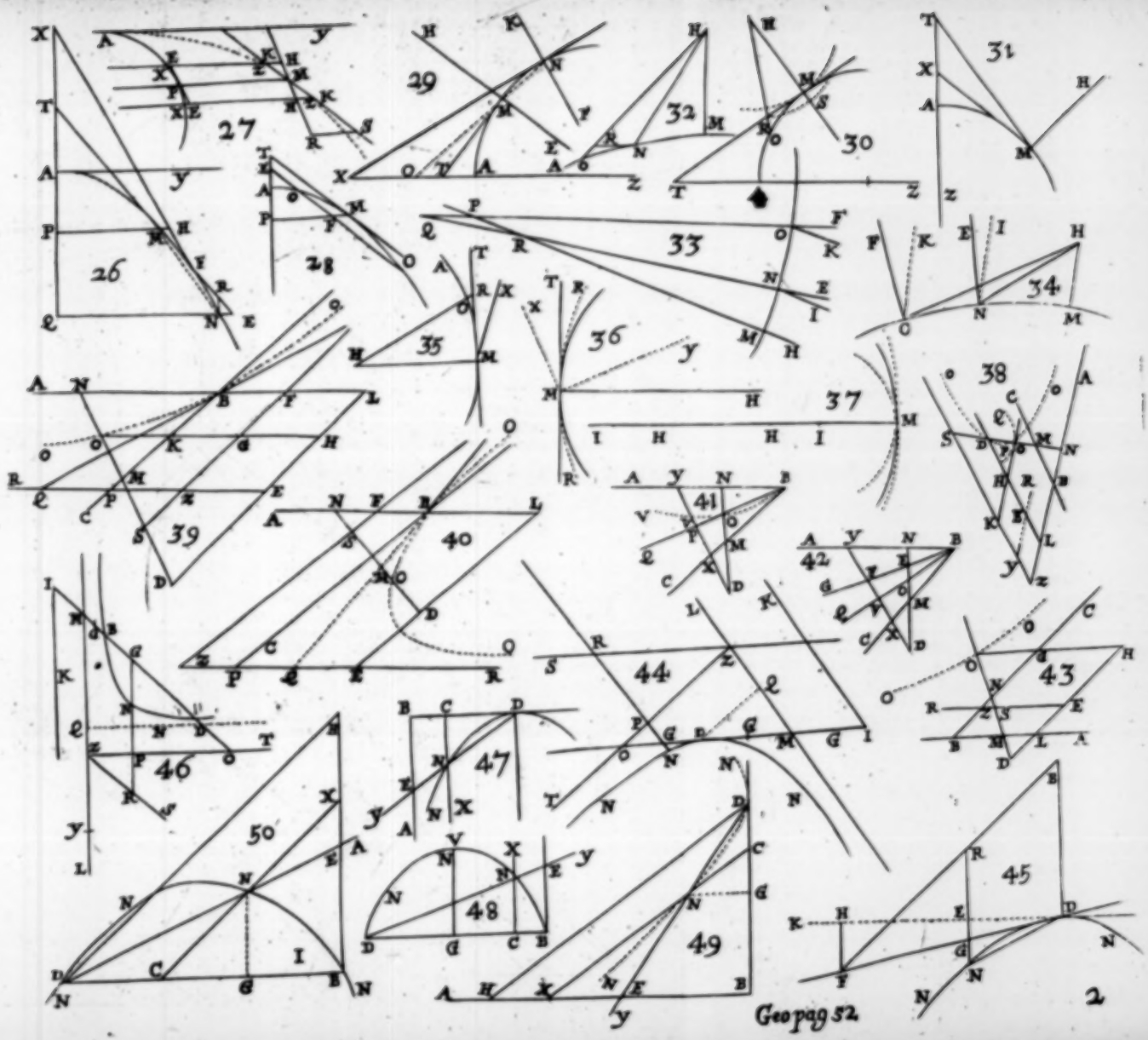
Quòd si fuerit æquatio $xy - ry = gx$, sumenda est D E $= r$, & B O $= g$ (infra rectam D B) ductisque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehensa, quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ D B, B A, ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallelæ, ac D Y per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius B E ad ipsam B F æqualis assignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X intersectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela, estque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque semper est D G $=$ R. Patet igitur factâ D G $=$ R, & ductâ G K ad B A parallelâ, intersectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis, sumpto autem alio in B A puncto O, ab hoc sumatur computandi initium, ut nimirum sit perpetuò B E, O F :: D B . R, erunt intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, sit D B $= b$; O B $= g$, D G $=$


27
29
32
30
31
26
28
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
44
43
46
47
50
48
49
45

Geo pag 52

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN est *hyperbola* suprà nuper determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB, fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta PX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ita ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad m) erunt intersectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela, vocentúrque $DB = b$, $HB = f$, $HO = g$, $DG = x$, $GN = y$; est ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare $NK\,(FH) = y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Est ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde resultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b} xx$. vel facto $f . b :: m . r$; est $my + gx - yx = \frac{m}{r} xx$. Constat igitur lineam DNN esse *hyperbolam*; qualis superiùs habetur determinata.

Notetur, si computatio ab ipso puncto H. initium sumat, (hoc est sit BE. HF :: DB. m) evanescente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r} xx$; unde quoque suprà habetur alia determinatio simplicior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò $PY = \sqrt{PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*, cujus utique Centrum est A, *semidiameter* AD, (vel *asymptotos* AB) *semiparameter* autem P, faciendo AD. DB :: DB. P. Fig. 55.

Sit enim $TD = \frac{1}{2} AD$. Estque AD. P :: (ADq. DBq :: * 8. 2. *Elem.* APq. PMq :: * TP × DP + ADq. PMq :: TP × DP. PMq − DBq ::) TP × DP. PYq. vel $TD, \frac{1}{2} P$, TP × DP. PYq. unde liquet Propositum.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY, erit PMq. PYq:: PA. PS.

Nam est PMq. DBq :: PAq. ADq :: PA. AS. ergò per rationis conversionem est PMq. PBq :: PA. PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis, sit jam PY = √PMq + DBq, erit etiam linea YYY *hyperbola*, cujus nempe Centrum A, *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF. AD :: AD. P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K, Sitque FT = 2 FA, estque AF. P :: (AFq. ADq :: DBq. ADq :: PMq. APq :: PYq — DBq. APq :: AKq — AFq. KYq ::) TK × FK. KYq :: AP. P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq. PYq :: PA. PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA. AS :: PAq. ADq :: PMq. DBq. ergò PA. PS :: PMq. PMq + DBq :: PMq. PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB, & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB, erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq. DBq (ACq.) :: AEq. EFq :: ADq — AEq. DBq — EFq. Hoc est ADq. ACq :: VE × ED. EGq. unde liquet Propositum.

Vicissìm, Tangat GT *ellipsin* CGD, est EFq. EGq :: EA. ET.

Nam ob AE. AD :: AD. AT. est AEq. ADq :: AE. AT. unde AEq. ADq — AEq :: AE. AT — AE. Hoc est EFq. DBq — EFq :: AE. ET. hoc est EFq. EGq :: AE. ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexâque rectâ AE, sit EG = AF, erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item FO ad TE parallela. Eſtque $EFq = EOq(CPq) + OFq + 2EO \times OF(+2CP \times OF)$. Verùm ob CP. CA:: OP. OF:: CE. OF, eſt $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2CA \times CE$. item eſt $AEq = CEq + CAq - 2CA \times CE$; quapropter eſt $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc eſt $EGq = (APq + PFq =) CV.q + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm eſt CE. (PO). PF:: CP. AP:: CP. CV; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG eſt *hyperbola*, cujus centrum C; ſemiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, ſumptáque QR = AE, & connexâ GR; erit GR *hyperbola* VGG perpendicularis; mihi præſta sis fidem; aut ipſe rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Poſitione datæ ſint rectæ AC, BD (ſe interſecantes in X) quas decuſſet recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD ſecet punctis P, K) ſit PL æqualis ipſi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, eſt AQ. AP:: (BX. BK::) QX. PL: ergò linea ALL eſt recta.

XXVII. Poſitione data ſit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX ſecet in M, & lineam DNN in N) ſit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; ſitque DB. Z:: Z. DE; & connectatur NE. Eſt jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$; quare DM. DB:: DE. DN. ergò triangula DBM, DNE ſimilia ſunt; quapropter angulus DNE rectus eſt; itaque linea DNN eſt circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; ſed & ſuo modo rectam ac *circulum* ſibi lineas eſſe reciprocas. Verùm hîc, etſi præludiis noſtris nondum abſolutis, paulùm ſubſiſtamus.

LECT. VII.

LECT. VII.

ADhuc in *Veſtibulo* hæremus, nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A, adſumpto tertio quopiam X, erit $A+X.B+X \sqsupset A.B$.

Nam ob $X.A \sqsupset X.B$, erit componendo $X+A.A. \sqsupset X+B.B.$ vel permutando $X+A, X+B \sqsupset A.B.$

II. In linea YZ ſignentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N ſumpto puncto quopiam E, alterôque G extra LN (verſus Z);

Fig. 61. ſecetur EG in F, ut ſit $GE.EF :: NL.LM$; cadet punctum F ad partes MZ:

* 1 *hujus.* Nam eſt $NE.ME \ast \sqsubset NL.ML :: GE.FE \sqsubset NE.PE.$ ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ, item rectæ BD, GP parallelæ;

Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipſam GP ſecantes punctis L, K, dico fore $DS.DT :: KG.LG$.

Nam eſt $KG.LG = KG.GB+GB.LG = PK.PS+PT.PL \sqsupset DB.DS+DT.DB = DT.DS$.

IV. Eſto triangulum BDT, baſique DB parallelam quamvis PG interſecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K;

Fig. 63. dico fore $LG \times TD + KL \times RD.KG \times TD :: RD.SD$.

Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde conſtat junctas PM, PN, PO ipſis TB, SB, RB (reſpectivè) parallelas eſſe. Et quoniam eſt $DM.PD :: DB.TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter eſt $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, tranſponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè diſcurſu

discursu est DM × TD — DM × RD = MO × RD. quapropter erit MN × SD. MO × RD :: TD — SD. TD — RD. hoc est LG × SD. KG × RD :: TD — SD. TD — RD, vel (ad æquationem redigendo) LG × SD × TD — LG × SD × RD = KG × RD × TD — KG × RD × SD, transponendóque LG × SD × TD + KG × RD × SD — LG × SD × RD = KG × RD × TD. hoc est LG × SD × TD + KL × SD × RD = KG × RD × TD. vel (ad analogismum reducendo) LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit LG × RD — KL × TD. KG × TD :: RD. SD. Fig. 64.
Simili constabit id discursu, quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint (A. α :: M. μ, & F. φ :: S. σ) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, D. δ :: P. π).

A.	B.	C.	D.	E.	F.
α.	β.	γ.	δ.	ε.	φ.
M.	N.	O.	P.	R.	S.
μ.	ν.	ο.	π.	ρ.	σ.

Sunt enim Aμ, Bν, Cο, Dπ, Eρ, Fσ, & αM, βN, γO, δP, εR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit Aμ, = αM, & Fσ = φS, liquidum est fore Dπ = σP; ac idcircò D. δ :: P. π. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint, hàsque secet positione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ, sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE, tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sitque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX Fig. 65.

eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, uti patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QI * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} Sunt ÷÷. unde QR. QK:: PF. PE.

Nat. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QI. I ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE, erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR. QK:: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.
QI * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} ſunt ÷÷. item QS. QI:: PG. PE. } ergò QR. QK:: PF. PE.
Et QI. QI:: PE. PE. }

Nat. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

XI. Item ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE; ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR. DK :: DF. DE.

Nam rursus DS. * DR. * DI.
DL. * DK. * DI.
DG. * DF. * DE.
DE. * DE. * DE.
} sunt ÷÷. unde DR. DK :: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE, & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KBK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KBK analoga.

Rursus enim DS. * DR * DI.
DL. * DK * DI.
DG. * DF * DE.
DE. * DE * DE.
} sunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D. A —: F :: N. M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A ± NX. & F = A ± MX. quare A —: D = NX. & A —: F = MX. unde A —: D. A —: F :: (NX. MX ::) N. M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series, & in utraque sumantur

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D. A —: F :: M —: P. M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè, nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia, sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim A + N ⊏ M (vel ⊏) B = A + C. ergò N ⊏ C. unde M + N ⊏ B + C = A + D. Est autem A + O ⊏ M + N. ergò A + O ⊏ A + D. Et ideò O ⊏ D. ergò M + O ⊏ B + D = A + E. Est autem A + P ⊏ M + O. ergò A + P ⊏ A + E; adeóque P ⊏ E. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F ∴ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint ∴ Geometricè, sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quàm M.

Nam si dicatur B non majus quàm M, erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si F = Q, constat ex præcedente fore E ⊏ P (scilicet utramque seriem invertendo) sin F ⊏ Q, potiori jure liquet fore E ⊏ P.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica, puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O ; & hinc C ⊏ N.

XVII. Consectatur hinc ; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad positione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à designato puncto D projectâ D H ; sit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter easdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ V D, B D positione datæ ; sint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, sit P φ constanter inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter easdem media Geometricè ; quia jam (a) rectæ E G, E φ semper eandem obtinent rationem, est linea φ φ φ recta ; verùm linea V F F est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si P F sit inter ipsas P G, P E simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si P F sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam φ φ φ eodem ordine respondenti lineæ V F F *asymptoton* esse. quod an πρῶτον sit nescio, nobis certè πάρεργον fuit, hic adnotâsse. Fig. 70. (a) 12 hujus.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam A C ductæ sint rectæ tres B A, B C, B Q ; tum in Q C producta sumatur sumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci potest (ad alterutras ipsius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; sit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejusdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, si B R ultra angulum A B C jaceat respectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas secans, ut vides ; & manifestum est, * è supra monstratis fore, F E ⊐ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat versus D ; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores sint interceptis à B Q, B A ; & sumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rursus utcunque ductâ D N, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema ; quoniam * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) Constr. niam jam est KF(b) ⊐ NF; & KE* ⊏ MF; perspicuum est restare FE ⊐ NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum ENM, FKI) manifestum est fore MN ⊐ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

(a) 19. hujus.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis ipsi CB; & connectatur EL. Estque jam IK. MN :: FK. EN :: DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) ⊏ QN. MN. quapropter est IK ⊏ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH intercepta OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 74.
(c) Constr.
(d) 6. Lect. VI.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B, sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO ⊏ BO = BK + KA. ergò KA ⊏ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO ⊏ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO ⊏ KO ⊏ KA.

Infra verò, est KL + LB ⊏ KB (ex hypothesibus *Archimedæi*) adeóque KL + LO ⊏ KA.

LECT.

Lect. VIII.

Mihi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exigua Civitati portas ingentes extruxisse.* Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (OMO. TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc, Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipsæ etiam lineæ OMO, TMT sese contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP sese contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contactum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT se mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F, sitque positione data recta FE, sint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta KL æqualis interceptæ FG, etiam curvæ EY, EZ sese contingent. Fig. 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta BEC, hunc utcunque secet ad FE parallela IL, sumatúrque GH = BC, & connectatur FH, sunt igitur è parallelis ad FE à rectis FG,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC; hoc eſt minores interceptis à curvis EY, EZ; hoc eſt minores interceptis à curva FX, & rectâ FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major eſt; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypotheſin*.

IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & ſint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ IL (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper KL = IG, curvæ EY, EZ ſeſe tangent.

Fig. 79.

Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* BEC, quem utcunque a D projecta ſecet recta DL; (a) poteſt jam ab F recta duci (puta FH) talis, ut ſint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipſis EB, EC, hoc eſt multo minores interceptis à recta EA, curvâque FX. Unde ſequetur angulum AFX rectilineo GFH majorem eſſe; ac idcirco rectam AF non contingere curvam FX, adverſus *Hypotheſin*.

(a) 10 Lect. VII.

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas IG, KL quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO ſic ad ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF ſemper eandem rationem inter ſe; tangat autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE conveniens in T) ducta TF alteram YFN quoque continget.

Nam utcunque ducatur recta IL (lineas expoſitas ut vides interſecans) Eſt igitur IL. IN (a) ⊏ IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN ⊐ IK. ergò punctum K extra curvam YFN jacet, totiq; recta TF.

(a) *Hyp.*

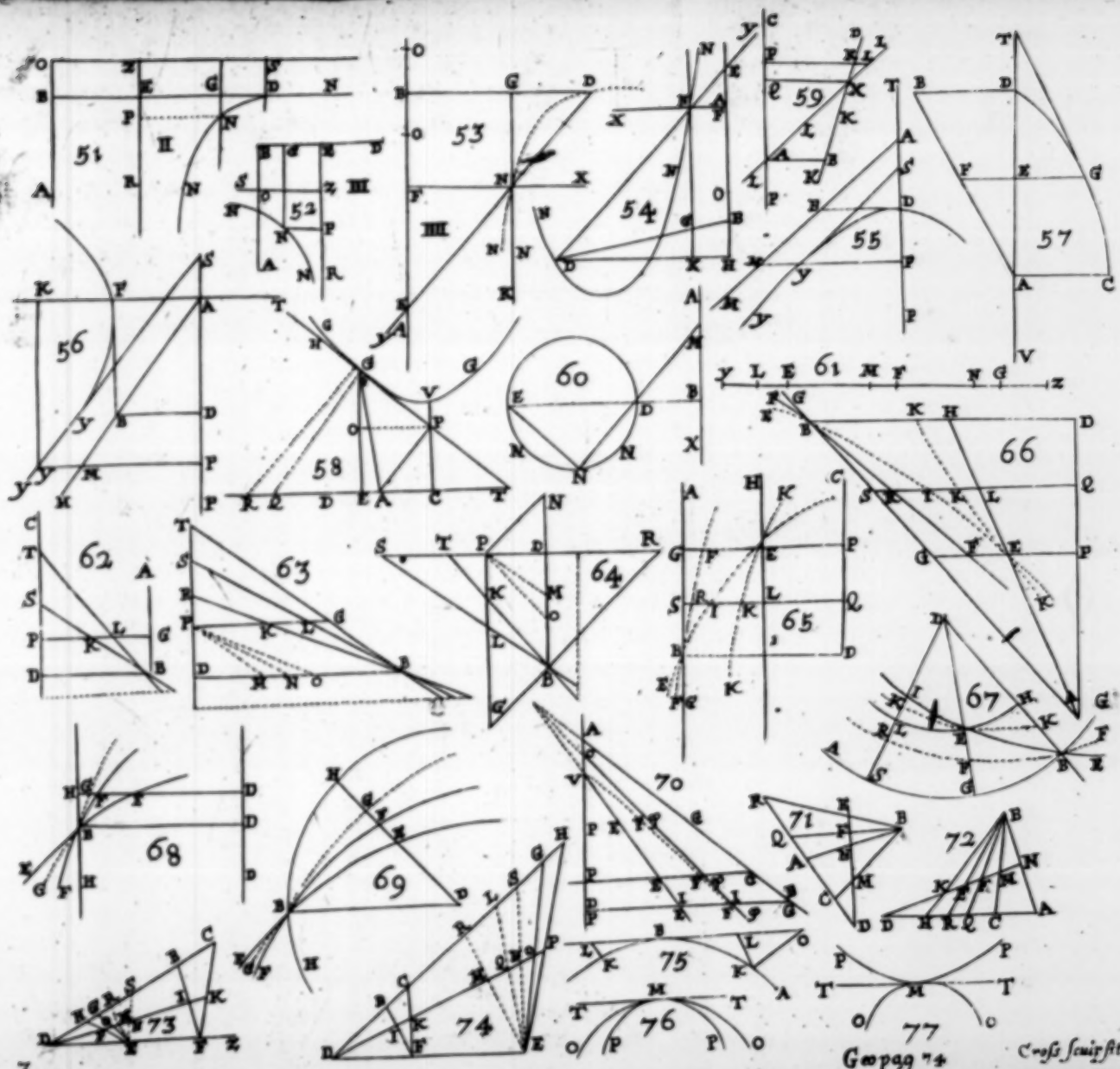
Aliter. Eſt IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN ::) OL. NK, ergò cùm lineæ GL, GO ſe (b) tangant, (c) etiam lineæ FN, FK ſeſe tangent.

(b) *Hyp.*
(c) *Schol. 4. hujus.*

Fig. 80.

VI. Etiam ſi tres curvæ XEM, YFN, ZGO ità referantur ad ſe, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XEM, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TF curvam YFN tanget.

Nam



Geopag 74

Cross sculpsit

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N. * quapropter erit punctum K extra curvam Y F N. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στενολεχίαν ego ac ἀδολεχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad se rectæ D E, D F rationem semper eandem; unam verò Y F N tangat recta F S; cui parallela sit E R; tanget recta E R curvam X E M. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas intersecans, ut vides). Estque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M; ergò quum sit D K ⊏ D N; erit D I ⊏ D M; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem semper eandem obtinent; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G; oportet curvæ Y F N tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ secet rectas T E, T G punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S; (a) est igitur I K ⊏ I N; quare curva T F K curvam Y F N tangit; (b) est antem curva T F K *hyperbola*; hanc tangat F S; (c) illa quoque curvam Y F N tanget.

(a) 2 Lect. VIII.
(b) 4 Lect. VI.
(c) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hìc primum injecta est mentio; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui spatio; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V.D concurrens in T; sumatúrque D S = D T; & connectatur F S; hæc curvam Y F N tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela; lineas expositas secans,

cans, ut vides. Estque TP . PM ⊏ (TP . PI ::) TD . DE item SP . PK :: SD . DF. ergò TP × SP . PM × PK ⊏ TD × SD . DE × DF :: TD × SD . PM × PN. Verum TD × SD ⊏ TP × SP ; ac indè magis TD × SD . PM × PK ⊏ TD × SD . PM × PN. quare PM × PK ⊐ PM × PN ; vel PK ⊐ PN. Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipsi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam sit punctum D ; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF ; sit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta) ; unam verò curvam XEM tangat recta ER ; alterius ad F tangens ità determinatur : Ducatur DP ad ER perpendicularis : factóque DP . Z :: Z . DB ; bisecetur DB in C ; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis ; hæc curvam YFN tanget.

Fig. 84.

Nam centro C per F describatur *Circulus* DOB ; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas intersecans, ut vides ; estque DO × DI (*a*) = DP × DB (*b*) = Zq (*c*) = DM × DN vel DO . DM :: DN . DI. ergò quum sit DM (*c*) ⊐ DI ; erit DO ⊐ DN ; itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

(*a*) 37 Lect. VI.
(*b*) *Constr.*
(*c*) *Hyp.*

XI. Curvæ XEM, YFN tales sint, ut ductâ quâpiam FE ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui ; curvam autem YFN tangat recta SF ; huic parallela RE alteram XEM continget.

Fig. 85.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ est NI ⊐ (KI = FB =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Reverà linea XEM nil aliud est, quàm ipsa YFN *transfocata*. Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam XEM. quam tangat recta ER ad E ; sit item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, sit semper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z ; curvæ YFN tangens (ad F) ità designatur : Sumatur DH = Z ; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipsi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela ; sumatúrque GL = GB ; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Fig. 86.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O, cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas secans, uti cernis. Estque Q O (*a*) = D P; (*b*) quare M O ⊏ D P (*c*) ⊏ D H (*b*) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit. (*a*) *Convers. 9 Lect. VI.* (*b*) *Hyp.* (*c*) *Elem.*

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (*d*) *9. hujus.*

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quàdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T, tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (*a*) ⊏ Q I; erit Q K q — Z q ⊏ Q I q — Z q; hoc est Q H q ⊏ Q G q, ergò curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget. (*a*) *Hyp.* (*b*) *22. Lect. 6.* (*c*) *Cor. 22. Lect. I.*

XIV. Cætera ponantur eadem, at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q. P F q :: P T. P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio, sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B, & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q, erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (*a*) ⊏ Q I q, erit ideò Q O q ⊐ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (*b*) Est autem (ex ostensis) (*a*) *Hyp.* (*b*) *24. Lect. VI.*

oſtenſis) curva O G O *Ellipſis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI. Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) ſit etiam alia curva V G C ad iſtam ſic relata, ut à deſignato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, ſit E G æqualis ipſi Z F, ſit autem P Q perpendicularis curvæ A F B, ſumatúrque Q R æqualis ipſi Z E; connexa recta G R ipſi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipſam F Q perpendicularis, ſeu curvam A F B tangens, & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G Θ ſecet punctis H, K, O) connexâque Z K, ſit H O = Z K; tum ductâ Z I quoniam H K (*a*) ⊏ H I, erit Z K ⊏ Z I, vel H O ⊏ H I, quare curva O G O curvam V G C tangit. (*b*) Eſt autem O G O (ex oſtenſis) *Hyperbola*, cui perpendicularis eſt recta G R; eadem itaque G R curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(*a*) *Hyp.*
(*b*) 25 Lect. VI

Fig. 91. XVII. Sint rectæ D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad poſitione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas ſecet, ut perſpicis) connexâque rectâ D Y, ſit ſemper R Y. D Y :: D Y. E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam deſignare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O ſecet punctis G, P, O) connexâque D O ſit ſemper G O. D O :: D O. P O, tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam ſecet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos O D P, D G P æquari, quare cum angulus D S P major ſit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; eſt autem curva D Y O *hyperbola* (*a*) ſuperiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(*a*) 12 Lect. VI.

Not. Si curva D R S ſit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *ciſſois* vulgaris, hujus itaque (cum innumeris aliis ſimiliter genitis) tangens hic definitur.

Fig. 92. XVIII. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B K; ſitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum R D Y triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D :: (D H . H B) :: Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (a) = D I) ⊐ (a) (D L (b) =) O N, ergò *hyperbola* N X N curvam B X X tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget.

(a) Constr.
(b) Converf. 9. Lect. VI

Cæterum satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

LECT. IX.

QUod ingreſſi ſumus iter actutùm rectà proſequemur.

I. Sint rectæ A B, V D ſibi parallelæ; quas ſecat poſitione data D B; tranſeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad ſe relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, ſit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine deſignato media *Arithmetice*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) deſignare. Fig. 94.

Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (a) explicuimus ſupra) exponentes; fiátque N. M :: D S. D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget. (a) 12. Lect. VII.

Nam utcúnque ducta ſit recta P G, dictas lineas ſecans, uti cernis: Eſtque F G. E G (b) :: N. M :: (c) D S. D T :: (d) L G. K G; cùm ergò (e) ſit K G ⊐ E G, erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam conſiſtere. (b) 11. Lect. VII. (c) *Conſtr.* (d) 3. Lect. 7. (e) *Hyp.*

II. Reliquis perſtantibus iiſdem, ſit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo conſtructæ lineæ ſeſe mutuò (a) continguht ad B, ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget. (a) 17. Lect. 7.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è ſex mediis tertia, erit ergò M = 7, & N = 3, adeóque D S. D T :: 3. 7.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypotheſi, ſumptóque quovis in curva F B F punctо F, etiam ad hoc punctum tangens recta ſimili pacto deſignatur. Fig. 95.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipſam D B parallela, ſecans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E, fiátque N. M ::

M :: PX. PY, connectatúrque recta FY, hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta CE ad AB (vel VD) parallela; concipiatúrque per E transiens curva HEH talis, ut ductâ quâpiam QL ad DE parallelâ (curvas EBE, HEH in L, & H; rectásque CE, VP in I ac Q secante) sit semper QH inter QI, QL eodem ordine media, quo PF inter PG, PE; è præcedente jam constat rectam connexam EY curvam HEH contingere; verùm curvæ HEH (a) analoga est curva FBF, (b) ergò recta FY curvam FBF quoque continget.

a 7. Lect. 7.
b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, posito lineam EBE rectam esse, quòd linea FBF parabolarum seu paraboliformium aliqua sit. quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè consectatur; si TD sit recta, sintque duæ quædam curvæ EEE, FFF ità ad se relatæ, ut ductis rectis PEF ad positione datam BD parallelis, sint ordinatæ PE semper ut quadrata ex ordinatis PF; rectæ verò ES, FT (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hasce contingant; erit TP = 2 SP; Quòd si ordinatæ PE se habeant ut ipsarum PF cubi, erit TP = 3 SP; si PE sint ut quadrato quadrata ipsarum PF, erit TP = 4 SP; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus ABC, cujus Centrum D; radius DB, item lineæ EBE, FBF per B transeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam DG, sit semper DF eodem ordine media Arithmeticè inter DG, DE; tangat autem recta BO curvam EBE in B; oportet curvæ FBF tangentem (ad B) delignare. Fig. 97.

Hoc (certè (a) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hic speciatim apertius atque plenius exequi: Quorsum sit DQ ad DB perpendicularis, quam secet BO in S; fiat verò N. M :: DS. DT; connectatúrque recta TB; hæc curvam FBF tanget.

a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta PB *circulum* ABG; secentúrque rectæ DS in X, & BS in Y, ità ut sit DS. DX :: M. N :: BS. BY; perque puncta X, Y ducantur XZ ad BS, & YV ad DS parallelæ, concurrentes in C; tum *asymptotis* YCZ per B traducta concipiatur *hyperbola* LBL; porrò ex D projiciatur utcunque recta DP dictas lineas Fig. 97.

inter-

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK. PL :: (a) M.N :: (b) GE. GF (c) ⊏ PE. PF ⊏ PK. PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ. ZB :: BS. ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS. SX :: (d) BS. SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ. CX :: DS. ST; compoſitéque RZ · RZ + CX :: DS. DT :: (d) N. M :: CZ. CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ. CX :: CZ. CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

a Converſ. 4. Lect. VI.
b 11. Lect. VII.
c 1. Lect. VII.
d Conſtr.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmetice Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX. DY :: N. M; & connectatur EY; ipſi demum EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit perpetuo DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (a) analoga eſt curva FBF; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

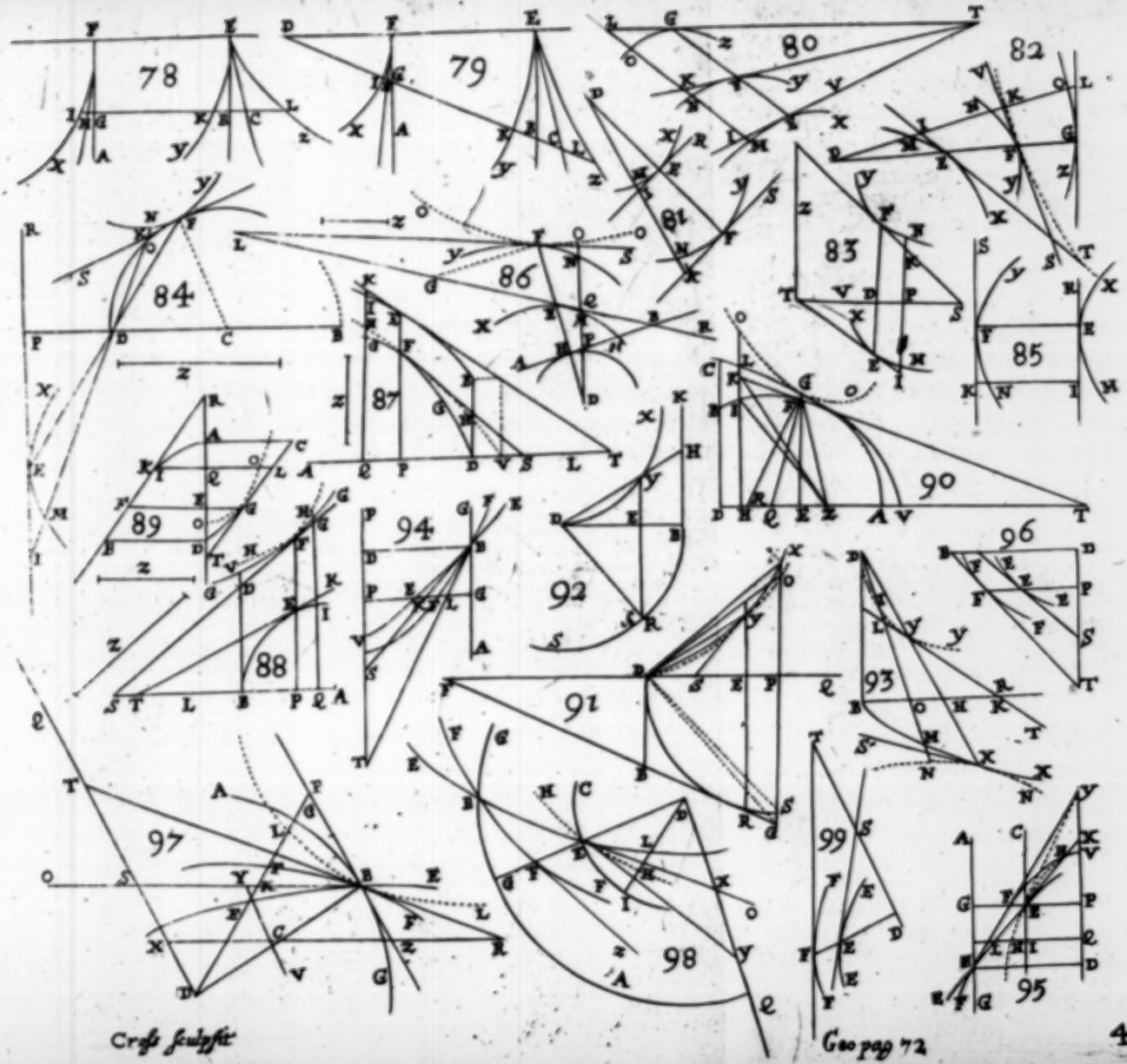
a 9. Lect. VII.
b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF


78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
Cregs sculpsit
Geo pag 72

DEF concurrentes punctis S, T; erit semper DT = 2 DS. Quòd si DE sunt ut cubi ipsarum DF, erit semper DT = 3 DS; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decusset positione data recta DB; transeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, sit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE, tangat autem BR curvam EBE, oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus sunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \overset{+M}{-N} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta sit PG, dictas lineas secans ut vides. Estque EG. FG :: (a) M. N. ergò FG × TD. EG × TD :: N × TD. M × TD. Item EF × RD. EG × TD :: M − N × RD. M × TD. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit FG × TD + EF × RD. EG × TD :: N × TD + M − N × RD. M × TD, (hoc est) :: (b) RD. SD. (c) Est autem LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. quare FG × TD + EF × RD. EG × TD :: LG × TD + KL × RD. KG × TD. hinc, cùm sit EG (d) ⊏ KG, erit FG × TD + EF × RD ⊏ LG × TD + KL × RD; vel FG. BF + TD. RD ⊏ LG. KL + TD. RD; seu (demptâ communi ratione) FG. EF ⊏ LG. KL. vel componendo EG. EF ⊏ KG. KL (e) ⊏ EG. EL. unde est EF ⊐ EL. itaque punctum L extra curvam FBF situm est; adeoque liquet Propositum.

(a) 11. Lect. VII.
(b) Constr.
(c) 4. Lect. VII.
(d) Hyp.
(e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si PF supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF sit è sex mediis tertia, seu M = 7; & N = 3; erit $3TD + 4RD . 7MD :: RD . SD$; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, secans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens, fiátque $N \times TP \overset{+M}{-N} \times RP$. Fig. 101.

$M \times TP :: RP . SP$; & connectatur SF; hæc curvam FBF tanget; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus; tantùm hic (non per E ad VD parallela ducitur, at) connectitur ET; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnoteur, si linea EBE sit recta, (rectæ nempe BR coincidens) esse lineam FBF ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P) cadant; curvæ FBF tangens (BS) designatur faciendo $N \times RD - \overset{M}{\underset{N}{\}}} \times TD . M \times TD :: RD . SD$.

Fig. 102.

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nodum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam EBE rectam esse, lineæ BR coincidentem) aft aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unà operâ determinantur.

Exemplum. Si PF sit è quatuor mediis quarta, seu $M = 5$; & $N = 4$; erit $SD = \frac{5TD \times RD}{4RD - TD}$.

Notetur, Si contigerit esse $ND \times RD = \overset{M}{\underset{N}{\}}} \times TD$, esse DS infinitam; seu BS ipsi VD parallelam. Alia possent adnotari; sed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois* & *Cissoidalium* omne genus comprehenditur: Sit utique semirectus angulus DSB; curvæque duæ SGB, SEE sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ GE ad BD parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint PG, PF, PE continuè proportionales; tangat autem recta GT curvam SGB in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo $2TP - SP . TP :: SP . RP$; utique connexa RE curvam SEE tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva SGB sit circulus, & applicationis angulus SPG

Fig. 103.

sit

ſit rectus, erit curva SEE *Ciſſois vulgaris*, ſeu *Diocles*; alioquin alterius generis *Ciſſoidalis*. Hoc autem *in transitu* perſtringo. Neq; jam amplius vos detinebo.

LECT. X.

INſtitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam AEG, nec non alia AFI ſic ad illam relata, ut ductâ quâcunque EF ad poſitione datam AB parallelâ (quæ curvam AEG ſecet in E, curvámque AFI in F (ſit perpetim EF æqualis curvæ AEG ab A intercepto arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG in E, ſitque ET æqualis arcui AE, & connectatur recta TF; hæc curvam AFI tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta GK ad AB parallela, lineas propoſitas ſecans, ut cernis; éſtque GK = GH + HK = GH + HT (a) ⌐ arc. AG = GI; unde punctum K extra curvam AFI ſitum eſt; adeóque recta TK ipſam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd ſi recta EF quamlibet ad arcum AE rationem ſemper eandem habeat, nihilo ſeciùs recta FT curvam AFI tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis ſexta manifeſtæ conſectatur.

Hæc antea pridem aliter oſtendimus; aſt hæc demonſtratio ſimplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam inſinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam AGE, punctúmque deſignatum D; ſit item alia curva AIF talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque DEF, ſit ſemper intercepta EF par arcui AE; tangátque recta ET curvam AGE; oportet curvæ AIF *Tangentem* (ad F) deſignare. Fig. 105.

Fiat TE = arc. AE; ſitque curva TKF talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ DK (quæ curvam TKF ſecet in K, rectámque TE in H)

sit semper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F, hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 17. Lect. VIII.

(a) 22. Lect. VII.

Est enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106.

V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA, & sit TR ad BA parallela, connectatur denuo recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 22. Lect. VII.

(b) 16. Lect. VI.

* *Hyp.*

(c) 3 Lect. VIII.

(d) 2. Lect. VIII.

Concipiatur enim curva LFL talis, ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) ⊏ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH, (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit, (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107.

VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(a) 18. Lect. VIII.

(b) 22. Lect. VII.

(c) *Hyp.*

(d) 4. Lect. VIII.

Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper DL = TH + HG; est itaque DL (b) ⊏ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent. item curvæ KFK, LFK

LFK ſeſe contingunt. (*e*) quare curvæ DIF, KFK ſe quoque contingent. (*e*) ergò denique recta F S curvam DIF continget. (*e*) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd ſi rectæ DF quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus AE rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam DIF tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic FS parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam AEH, recta AD (in qua determinatum punctum D) recta DH poſitione data; ſit item curva AGB talis, ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ DGE (quæ curvam AEH ſecet in E) ductâque GF ad DH parallelâ habeant AE, AF aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta ET curvam AEH; recta deſignetur oportet, quæ curvam AGB ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta EV æqualis arcui EA; & concipiatur curva OGO talis, ut projectâ quâcunque rectâ DOL (quæ curvam OGO ſecet puncto O, rectam ET in L) ductâque OQ ad GF parallelâ, ſit VL. AQ :: X. Y; eſtque curva OGO (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta GS; etiam recta GS curvam AGB continget.

Nam concipiatur altera curva NGN talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria DL in N, curvam AEH in K, rectam TE in L; ductáq; ſit NR ad GF parallela, ſit VL + LK. AR :: X. Y; manifeſtum eſt curvam NGN utramque curvam AGB, & OGO tangere. [ſecet enim recta DL curvam AEB in I, ducatúrque IP ad GF parallela; quum ergò ſit VL + LK. AR :: X. Y :: AK. AP. & ſit VL + LK ⊏ AK; erit AR ⊏ AP; vel DR ⊐ DP; adeóque DN ⊐ DI; unde punctum N intra curvam AGB ſemper cadet; ac proinde curva NGN curvam AGB tanget; ſimilique planè diſcurſu curva NGN curvam OGO continget.] Itaque curvæ AGB, OGO ſeſe (æquipollenter) tangunt. Quare cùm recta GS curvam OGO tangat; eadem curvam AGB quoque continget: Q. E. F.

Si curva AEH ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva AGB *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur,

Hujuſmodi

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hic inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimis applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *interepto* V D E Z, fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget. Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I. Fig. 110.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimilique jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur, unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z, ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit. Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attiginus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia V D E Z; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tângat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = V D E Z. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F D q. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat. (a) 9. Lect. IX. (b) Cor. prec.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, D E, &c. ab initio D A continuò decrescant) tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta D K G; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 G D E ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergo R L ⊏ E X ⊏ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K; ergò magis punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E versus Z; istque rursus, uti priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G, & fiat D G. D K :: R. P; sumaturque D T = 2 P, & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N, erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q :: 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P . P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q :: 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modò demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, *& Curva* D K E *Spiralis Archimedea*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum
Fig. 114. hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G :: D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H . D K :: $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quo-
* *In* 12. *hujus.* niam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P ſecare ad T, ut ipſius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum ſtatuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P = *m*, P T = *t*; M R = *a*; N R = *e*; reliquáſque rectas, ex ſpeciali curvæ natura determinatas, utiles propoſito, nominibus deſigno; ipſas autem M R, N R (& mediantibus illis ipſas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehenſam inter ſe comparo; regulas interim has obſervans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum *a*, vel *e* poteſtas habetur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe (etenim iſti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Poſt *æquationem conſtitutam*, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas, ſeu determinatas deſignantibus; aut in quibus non habentur *a*, vel *e*. (etenim illi termini ſemper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro *a* ipſam *m*; (vel M P) pro *e* ipſam *t* (vel *P T*) ſubſtituo. Hinc demum ipſius P T quantitas dignoſcetur.

Quòd ſi calculum ingrediatur curvæ cujuſpiam indefinita particula; ſubſtituatur ejus loco tangentis particula ritè ſumpta, vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è ſubnexis Exemplis clarius elucescent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus ſit; & ſit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H ſecet in K, curvam A M O in M, ſit ſemper ſubtenſa A M æqualis abſciſſæ B K; hujus curvæ ad M tangens eſt deſignanda. Fig. 116.

Fiant quæ ſupra præſcripta ſunt, & (ductâ A N L) nominetur A B = *r*; & A P = *q*, unde A Q = *q* − *t*; item Q N = *m* − *a*. ergò eſt $qq + tt - 2qt + mm + aa - 2ma = (AQq + QNq = ANq =)$ B L q; hoc eſt (rejectis, uti monitum eſt, rejiciendis) $qq - 2qt + mm - 2ma =$ B L q. Porrò eſt A Q. Q N :: A B. B L; hoc eſt $q - t. m - a :: r.$ B L $= \frac{rm - ra}{q - t}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + tt - 2qt.} =$ B L q; ſeu (rejectis ſuperfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qt} =$ B L q $= qq - 2qt + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3t + qqmm - 2qqma - 2q^3t + 4qqtt - 2qmmt + 4qmat$; hoc eſt (abjectis iis, quæ præſcripſimus

abjicienda) $= 2rrma = -4q^3t - 2qqma - 2qmmt$. vel $rrma - qqma = 2q^3t + qmmt$; vel denuò ſubſtituendo m pro a, & t pro t, eſt $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta EA (poſitione ac magnitudine data) & curva EMO proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ MP ad EA perpendiculari *Summa Cuborum* ex AP, & MP æquetur *Cubo* rectæ AE.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $= f^3 + 3ffe$. Item NQ cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc eſt) $= m^3 - 3mma$. Quapropter eſt $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. $+$ NQ cub. $=$ AE cub. $=$) r^3. abjectiſque datis, eſt $3ffe = 3mma = e$. ſeu, $ffe = mma$; ſubrogatiſque loco a, & e ipſis m, & t, erit $fft = m^3$; ſeu $t = \frac{m^3}{ff}$; eſt ergò PT quarta proportionalis in ratione AP ad PM continuata.

Similiter, Si fuerit $APqqq + MPqqq = AEqqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel PM quarta proportionalis in ratione AP ad PM; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Poſitione data ſit recta AZ, & AX magnitudine; ſit etiam *curva* AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad A Z normali, ſit AP *cub.* $+$ PM *cub.* $=$ AX $\times$ AP $\times$ PM.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & AQ *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & QN *cub.* $= m^3 - 3mma$. & AQ $\times$ QN $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde AX $\times$ AQ $\times$ QN $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; ſeu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3fft - bmt$; ſubſtituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; ſeu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductiſque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Eſtque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. hoc eſt, $r.p :: a.\frac{pa}{r}$ = arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc eſt, $k.m :: r.\frac{rm}{k}$ = EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc eſt $r.\frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r}.\frac{pma}{rk}$ = LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc eſt $k.r :: f.\frac{rf}{k}$ = AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk}$ = AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis ſuperfluis) = AL q; adeóque LF q = $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa.}{kk}$ Fig. 119.

Eſt autem AQ q. QN q :: AL q. LF q; hoc eſt $Q:f - e.Q:m + a ::$ AL q. LF q. hoc eſt $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (ſublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrmt$; ſeu $kkpa - rrfa = rrmt$; vel ſubſtituendo juxta *præſcriptum*, $kkpa - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur eſſe rectam $AT = \frac{kk}{rr}p$; hoc eſt (quoniam, ut notum eſt, $AV = \frac{rr}{p}$) erit $AT = \frac{AMq}{AV}$; ſeu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

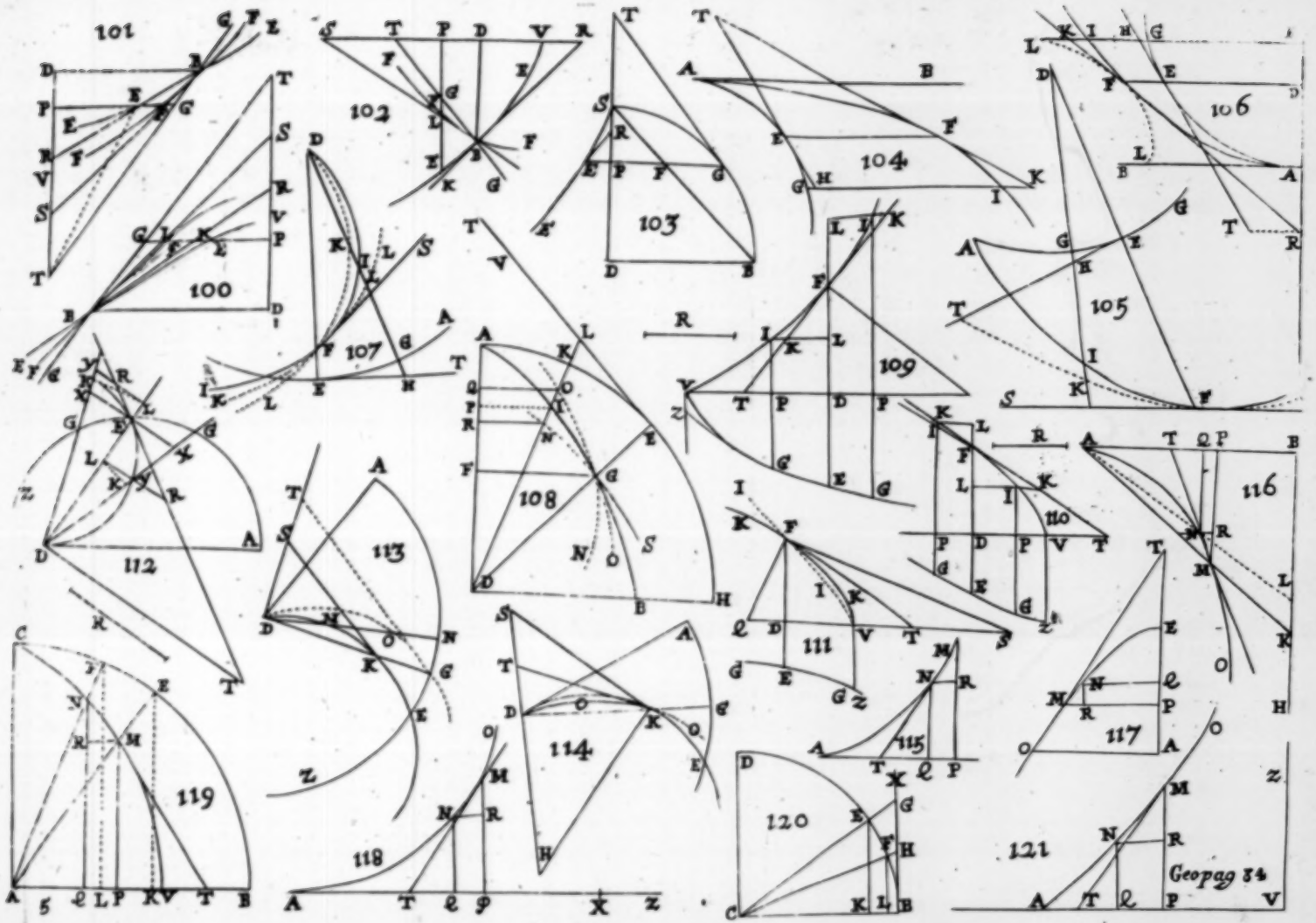
Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque ſumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectâque P M ad A V normali, ſit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H, demiſſis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam eſt C E. E K :: arc. E F. L K; vel C E. E K :: Q F. L K; hoc eſt $r . g :: e . \frac{ge}{r}$ = L K; erit C L = $f + \frac{ge}{r}$. Et L F = $\sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Eſt autem C L. L F :: (C B. B H ::) C B. Q N. hoc eſt, $f + \frac{ge}{r} \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimiſſis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde ſubſtituendo, eſt $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. ſeu (quoniam eſt $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CB_q}{CG_q} BG = \frac{CK_q}{CE_q} BG$.

Hæc ſufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.


101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

Geopag 84

LECT. XI.

RElíquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (seu è perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se obiecerunt Theoremata*; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea ϱ Z ↓ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (putaE, ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta EAZ ad axem perpenicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis, erit *spatium* A D ↓ ϱ *æquale semissi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus; & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ; curvæ occurrentes in E, F, G; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint; lineæ verò se intersecent; ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro rectâ haberi potest) quare H L . L G :: P D . D H. adeóque H L × D H = L G × P D; hoc est H L × H O = D C × D ↓. Simili monstrabitur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z; & similiter K I × K Y = B A × B Z; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z; unde constat triangulum H D O (quod à rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ↓ ϱ (quod itidem à rectangulis D C × D ↓ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt); hoc est $\frac{DHq}{2}$ æquari spatio V D ↓ ϱ.

Longior discursus apagogicus adhiberi posset, at quorsum?

II Iisdem

II. Iisdem positis, atque paratis, *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex basi DH.

Fig. 122.

Nam ob HL. LG :: PD. DH :: PD × DH. DHq, erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D↓ × DH. Similique discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari τῷ $\frac{DHqq}{4}$ & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* = $\frac{DH^2}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD↓φ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD↓φ semiquadrato.

Fig. 122.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ VD↓φ adaptari potest spatium VDH, tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium $VAZ\varphi = \frac{AEq}{2}$; & $VBZ\varphi = \frac{BFqq}{2}$ & $VCZ\varphi = \frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$

Præced. Lect. X.
(*b*) 1 *hujus.*
Fig. 122.

(*c*) 3 *hujus.*

(*c*) hoc est τῷ $\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est τῷ $\frac{VD\downarrow\varphi \times VD\downarrow\varphi}{2}$.

V. Quòd si ducantur omnia √VAZφ, √VBZφ, √VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD↓φ cubato (τῷ $\frac{2}{3}$ √VD↓φ^2)

Nam adaptatâ curvâ VH, est √VAZφ = AE √$\frac{1}{2}$; & √VBZφ = BF √$\frac{1}{2}$, & √VCZφ = √CG √$\frac{1}{2}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH\ cub}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \frac{DH\ cub}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2VD\downarrow\varphi$, vel $DH^6 = 8VD\downarrow\varphi^{\frac{1}{2}}$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18}VD\downarrow\varphi^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{VD\downarrow\varphi^{\frac{1}{2}}}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\downarrow$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD\downarrow$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9}VDq \times A\downarrow q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{27}VD^3 \times D\downarrow^3}\sqrt{\frac{32}{243}VD^3 \times D\downarrow^3}$.

Similia plura de factis è *Segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* $AD\xi\theta$ *aquale semisse quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$ & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *solidum factum ex spatio*

ſpatio V D↓q *circa axem* V D *rotato ſubduplum ſolidi ex ſpatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, conflati.*

Nam ob H L. L G :: P D. D H :: D↓. D H :: D↓q. D↓ × D H :: D↓q. H S × D H; erit H L × H S × D H = L G × D↓q. = D C × D↓q. Simili planè diſcurſu erit L K × L X × D L = C B × C Zq; & K I × K X × D K = B A × B Zq, &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\pi}{3}$: A Zq + B Zq + C Zq, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{2\pi}{3}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva V E H rectæ V D convexas ſuas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ducta E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factáque A Z = A P; erit ſpatium V D↓ = $\frac{D H q}{2}$. Sin quoque fiat A Y = V P; erit ſpatium V D ξ = $\frac{V H q}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam V H (cujus axis V D, baſis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ E T, quæ curvam tangat, & rectâ E I Z ad baſin parallelâ, ſit perpetuò I Z æqualis ipſi A T; dico *ſpatium* D H O *ſpatio* V D H *æquari.*

Æquiſecetur enim recta D H indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes*; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum G L H ſimile triangulo T D H (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus G H rectæ inſtar cenſeri poteſt, eatenus tangenti H T coincidens) quare L G. L H :: T D. D H; & L G × D H = L H × T D; ſeu C D × D H = L H × H O. ſimili ratiocinio eſt B C × C G

CG=KL×LZ, & AB×BF=IK×KZ, & VA×AE=DI×IZ. Verùm ſumma CD×DH+BC×CG+AB×BF+VA×AE à ſpatio VDH minimè differt, & ſumma LH×DO+KL×LZ+IK×KZ+DI×IZ à ſpatio DHO minimè differt. itaque ſpatia VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctiſſimo Viro *D. Gregorio Aberdonenſi* debetur, cui ſequentia ſubnectimus.

XI. Iiſdem poſitis; ſolidum ex ſpatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit ſolidi facti ex ſpatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam eſt HL. LG:: (DH. DT:: DH. HO::) DHq. DH×HO. unde HL×DH×HO=LG×DHq=CD×DHq. Similique diſcurſu ſunt LK×DL×LZ=BC×CGq. & KI×DK×KZ=AB×BFq. & demum ID×DI×IZ=VA×AEq. Eſt autem (ut vulgò notatum habetur) ſumma CD×DHq+BCB×CGq+AB×BFq+VA×AEq dupla ſummæ DI×IE+DK×KF+DL×LG, &c. Quare ſolidum ex ſpatio HDO circa axem DR converſo factum duplum eſt ſolidi, quod è ſpatio VDH circa VD converſo producitur.

XII. Hinc, ſumma DI×IZ+DK×KZ+DL×LZ, &c. æquatur ſummæ quadratorum ex applicatis ad VD, ſcilicet ipſis AEq+BFq+CGq, &c.

XIII. Simili ratiocinio conſtabit ſummam DIq×IZ+DKq×KZ+DLq×LZ, &c. triplam eſſe ſummæ DIq×IE+DKq×KF+DLq×LG, &c. hoc eſt æqualem ſummæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas poteſtates* obſervabilis eſt Concluſionum tenor.

XIV. Iiſdem poſitis, ſi DXH ſit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, ſit media proportionalis inter ſibi congruas ordinatas IE, IZ, erit ſolidum ex ſpatio VDH circa axem DH rotato duplum ſolidi ex ſpatio DXH circa eundem axem DH converſo procreati.

Nam ob VA×AE=DI×IZ, erit VA×AE×EI=DI×IZ×IE=ID×IXq. Similique de cauſa AB×BF×FK=IK×KXq, & BC×CG×GL=KL×LXq, &c. Eſt autem ſumma VA×AE×EI+AB×BF×FK+BC×CG×GL, &c. Subdupla ſumma *In 10. hujus.*

mæ $VDq + EIq + FKq + GLq$; ergò summa $IXq + KXq + LXq + HXq$, subdupla est summæ $VDq - EIq + FKq + GLq$. Vnde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq$, &c. $= \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT; & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit $IZq + KZq + LZq$, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ $VA \times AE \times AY + AB \times BF \times BY + BC \times CG \times CY$, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. $= VA \times AE \times AYq + AB \times BE \times BYq + BC \times CG \times CYq$, &c. *hoc est figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur,
Fig. 126. Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spa- DHO circa axem VR converso duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in cur-
Fig. 127. va AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

R. FZ; erit ſpatium ADLK æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam ſit DH = R; & compleatur rectangulum BDHI; tum aſſumptâ MN indefinitè parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD, & MEX, NOS ad AD parallelæ. Eſtque NO. MO:: TF. FM:: R. FZ. Unde NO × FZ = MO × R, hoc eſt FG × FZ = ES × EX. ergò cum omnia rectangula FG × FZ minimè differant à ſpatio ADLK, & omnia totidem rectangula ES × EX componant rectangulum DHIB, ſatis liquet Propoſitum.

XX. Iiſdem poſitis, ſit curva PYQ talis, ut ſumpta in ſumpta recta MX ordinata EY (reſpectivæ) ipſi FZ æquetur, erit *ſumma quadratorum* ex FZ (ad rectam AD computata) par ei quod fit ex ipſa R in *ſpatium* DBQB ducta.

Eſt enim FG. ES:: NO. MO:: R × FZ. FZq:: R × EY. FZq. adeóque FG × FZq = ES × R × EY.

XXI. Simili ratione *ſumma Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis EY ad BD applicatis. neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis DOK, in qua deſignatum punctum D; & ſubtenſa recta DK, ſit item curva AE talis, ut à D projectâ quâvis rectâ DMF (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductiſque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datique quâdam R, ſit DS. 2R:: DMq. DFq; erit ſpatium ADE æquale ex R, DK.

Nam ſubtenſa DK indefinitè ſecta concipiatur punctis PQ, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus PM, QRN; curvam DOK ſecantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG; ſint vero DT ad DK; & DS ad DM perpendiculares; quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX, & per F arcus FY. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum KPM triangulo KDT ſimile. ac ideò MP. PK:: TD. DK. item eſt DP. PM:: DE. EX. ſeu, propter aſſignatam cauſam, DK. MP:: DE. EX. Eſt itaque MP × DK. PK × MP:: TD × DE. DK × EX. hoc eſt DK. PK:: TD × DEq. DK × EX × DE. ac inde DKq × EX × DE = PK × TD × DEq. (a) Eſt autem DT. 2R:: DKq. DEq; ſeu DT × DEq = 2R × DKq. ergò eſt DKq × EX × DE = PK × 2R × DKq. quare EX × DE = 2R × PK; hoc eſt, 2 ſector DEX = 2R × PK. unde ſector DEX = R × PK. Simili planè diſcurſu ſector DFY

(a) *Hyp.*

æquatur ipſi R × RM, vel R × QP. itaque totum ſpatium ADE quod ab ejuſmodi ſectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propoſitum.

Fig. 128. XXIII. Iiſdem, quoad cætera, poſitis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut ſit $DE = \surd DK \times DH$; & $DF = \surd DM \times DI$; ac ità perpetuò; erit ſpatium ADE quadrati ex DK ſubquadruplum.

Nam eſt MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX, hoc eſt DK. PM :: DE. EX. ergo MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc eſt DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur ſemiſſi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo ſpatio* EDA; unde manifeſte conſequitur Propoſitum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique ſubtendatur recta DK; ſit item curva DZI talis, ut ſumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; ſumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, ſit PZ = DS; erit *ſpatium* DKI æquale *duplo ſpatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipſi DK perpendicularis ſit, & KT curvam DOK tangat. Eſt itaque (ducto arcu MP) rurſus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem ſecet ſubtenſa DM in R; eſt ergo rurſus MR. RN :: MD. DS; hoc eſt PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia ſimul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc eſt ſpatium DKI duplo ſpatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iiſdem quoad cætera poſitis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipſis MS reſpectivis; & ad rectam aſſumptam Xk, diſtantiaſque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipſis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ k d, m d, n d, &c.

pares

pares ſubtenſis KD, MD, ND; &c. erit ſpatium X *k d* æquale ſpatio DKI.

Nam eſt KM. KP :: KT. KD; hoc eſt *k m*. KP :: KI. *k d*. unde *k m* × *k d* = KP × KI. Similique pacto, MN. MR :: MS. MD. ſeu *m n*. PQ :: PZ. *m d*. unde *m n* × *m d* = PQ × PZ. ac ità deinceps. unde conſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ. *k g*, completóque rectangulo X *k g b*, curva DZI talis intelligatur, ut ſit MD. MS :: *k g*. PZ; erit rectangulum X *k g b* æquale ſpatio DKI. Fig. 130.

Nam eſt rurſus KP. KM :: KD. KT :: *k g*. KI. adeóque KP × KI = (KM × *k g* =) *k m* × *k g*. Similitérque PQ × PZ = *m n* × *k g*. ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio DKI cognoſcetur quantitas curvæ DOK.

Hujuſmodi verò complura deprehendet quiſquis hanc *Minervam* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, baſis DH) quam tangat utcunque recta ET; & ducatur EA ad HD parallela. tum altera ſtatuatur curva GZZ talis, ut à puncto E ductâ rectâ EZ ad VD parallelâ (quæ baſin DH in I, curvam GZZ in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper DAq. Rq :: DT. IZ; erit DA. AE :: Rq. ſpat. DIZG. (vel facto DA. R :: R. DP; ductâque PQ ad DH parallelâ, erit *Rectangulum* DPQI par *ſpatio* DGZI).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet AMB (cujus axis AD); ſit item linea KZL proprietate talis, ut ſumpto in AMB quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ MP ad curvam AB perpendiculari (quæ axem AD ſecet in P) & rectâ MG ad AD perpendiculari (quæ curvam KZL ſecet in Z) ſit conſtanter GM. MP :: arc AM. GZ; erit *ſpatium* ADKL æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu AM. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum; etenim hic animus eſt paulo ſubſiſtere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. CUm pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi, quin & præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hic visum est apponere.

Fig. 133. II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT, *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) ità se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam

ipſam AFB) ſit perpetuo TG major quàm SG; dico nullam curvæ AFB partem intra ipſam AEB cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars NFM; ità ſcilicet ut curva AFB curvam AEB interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata EFG; ſint verò lineæ LXK, RYQ tales, ut ductis rectis EO, FP ad ipſas ES, FT perpendicularibus, protractâque rectâ EG, ut hæc dictas lineas LK, QR ſecet punctis X, Y; ſit GX = GO, & GY = GP. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium* IHKL $= \frac{HMq - INq}{2}$ = ſpat. IHQR; adeóq; ſpat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX): : SG, GE. ⊐ SG. GF ⊐ TG. GF: : GF. GP (GY) ⊐ GE. GY, eſt GX ⊏ GY; adeóque (cùm hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium IHKL majus ſpatio IHQR; quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam BAE, cujus axis AD, & ad hunc ordinata baſis ADE, ſegmenti verò BAE centrum gravitatis ſit punctum H, per quod ducta ſit recta RS ad BE parallela Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) MRASN, habens itidem axin AD, ac ità priorem curvam BAE ſecans, ut ejuſce pars ſuperior RKAPS intra curvam BAE cadat, inferiores verò reliquæ partes RM, SN extra eandem; erit ſegmenti MRASN centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin MN. Fig. 135.

Nam è ſegmento RIAOS ablatum RIAK + AOSP reſiduum BRKAPSE deprimet verſus baſin BE, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum BRM + ESN adhuc totum MRKAPSN magis deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* AFB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES *Diametro* CA occurrentes punctis T, S; & ad CA perpendiculares ſint rectæ BD, EP; ſit autem AD major quàm AP, erit TD. AD ⊏ SP. AP. Fig. 136.

Nam eſt CT. CA: : CA. CD. Ideoque CT − CA. CA − CD: : CT. CA, hoc eſt TA. AD: : CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe SA. AP: : CS. CA. Eſt autem CT. CA ⊏ CS. CA. quare TA. AD ⊏ SA. AP. vel componendo TD. AD ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD ⊐ SP. AP.

Fig. 137.

Nam est CA. CD :: CT. CA. unde CA − CT. CD — CA :: CT. CA; hoc est TA. AD :: CT. CA. suppare discursu, est SA. AP :: CS. CA. Verùm est CT. CA ⊐ CS. CA. quare TA. AD ⊐ SA. AP; seu componendo TD. AD ⊐ SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes sint axis AD, & basis BD; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$ (vel $m-n . m-2n :: CA . AD$) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138.

Nam quia BT *circulum* tangit, est CT. CA :: CA. CD; unde TA. AD :: CA CD. componendoque TD. AD :: CA + CD. CD Item, quoniam est (ex hypothesi) CA. AD :: $m-n . m-2n$; erit per rationis conversionem CA. CD :: $m-n . n$. & componendo CA + CD. CD :: $m . n$. hoc est TD. AD :: $m . n$. unde (*a*) palam fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(*a*) 2 *hujus ap.*

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius AD ad CA' designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, si $AD = \frac{s}{t}$, erit $\frac{t-s}{2t-s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m-n . m-2n :: t . s ::$ CA. AD. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139.

Nam utcunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Estque

RG.

RG.AG::(a) $m.n$::TD.AD(b) ⊏ SG.AG. quare RG ⊏ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere.

(a) 2. hujus. app.
(b) 5. hujus ap.
(c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem stantibus, si ad basin GE (utcunque parallelam ipsi DB) & axem AD constituta intelligatur *paraboliformis* ejusdem cum ipsa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A supra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; est VP. AP ⊐ SG. AG ⊐ RG.AG::$m.n$; (a) itaque rursus liquet Propositum.

(a) 3. hujus ap.

XI. Consectatur etiam dictam (ipsi AFB coordinatam & ad basin GE constitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* statim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipsam tangens RE circulum secat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam posito quòd occurrat uspiam ad N, (a) tota supra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac ostensum est.

(a) 3. hujus ap.

XII. Porrò, *Hyperbola* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes sint axis AD, basis DB; Fig. 140.

sit autem $AD = \frac{2n - m}{m - n} CA$; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Nam est CD.CA::CA.CT. ac indè AD.TA::CD.CA; inverséq; componendo TD.AD::CA + CD.CD. Verùm ex hypothesi, est $m - n . 2n - m$::CA.CD; adeoque inversè componendo CA.CD::$m - n.n$; & rursus componendo CA + CD. CD::$m.n$. hoc est TD.AD::$m.n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rursù datà ratione ipsius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens designabitur. nempe sit $AD = \frac{s}{t} CA$; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc supposito erit (σαυρηδὸν

 mul-

multiplicando) $2tn+in=mi+mi$. vel transponendo $2nt=mi=mi-ni$. unde $m-n.2n-m::i.i::CA.AD.$ ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Estque SG.AG::(a) $m.n$::TD.AD(b)⊐RG.AG. unde RG⊏SG.(c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(a) 2. *hujus ap.* (b) 6. *hujus ap.* (c) 3. *hujus ap.*

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam si in *curva hyperbolica* AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP.AP⊏*m.n.* adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. Quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbola* non occurrit, patet; quoniam hoc posito, (a) ipsa intra *hyperbolam* AN tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

(a) 3. *hujus ap.*

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & basin DB; *parabola* ad partes supra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est *Parameter parabola* AFB. quòd si supra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse GEq=AG×GK⊏AG×DI=GFq. unde GE⊏GF. Item, si infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet esse MOq=AO×DI⊏AO×OL=NOq. & ideò MO⊏NO.

Fig. 142.

$\sqsubset$ NO. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt.
Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ AH *Ellipſis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & baſin DB, *parabola* ſupra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra DB protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I; ergò DI eſt *parabola parameter*. Quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd ſi infra BD, utcunque ducatur recta MNOL ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$. & indè $NO \sqsubset MO$. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ*. Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, baſis BE, ſitque C centrum circuli, & EH ſinus rectus arcus BAE; item, ſit $AD = \frac{s}{t}CA$; erit Fig. 144.

1. $\frac{2t-s}{3t-2s} AD \times BE \sqsubset$ port. BAE.

2. $EH + \frac{4t-2s}{3t-2s} BH \sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3} AD \times BE \sqsupset$ port. BAE.

4. $EH + \frac{4}{3} BH \sqsupset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbola dimenſionem ſpectantes regulæ*. Sit *hyperbola* (cujus centrum C) ſegmentum ADB, habens axin $AD = \frac{s}{t}CA$; & baſin DB; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s} AD \times DB \sqsupset$ ſegm. ADB. &

2. $\frac{2}{3} AD \times DB \sqsubset$ ſegm. ADB.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t-s}{5t-3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éſtque punctum H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t-s}{2t-s}$ & (b) quæ proinde circulum AEB tangit; (nam ſi $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$, erit $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{n+2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque punctum H ſupra K ſitum eſt.

(a) 2. *hujus ap.*
(b) 8. *hujus ap.*
(c) 10. *hujus ap.*
(d) 11. *hujus ap.*
(e) 4. *hujus ap.*

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E, gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t+s}{5t+3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. *hujus ap.* Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t+s}{2t+s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$, erit $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad B E pertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit; & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H exiſtit.

(b) 13. *hujus ap.*
(c) 15. *hujus ap.*
(d) 16 *hujus ap.*
(e) 4. *hujus ap.*

XXIV. Paraboloæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Ne

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* A B Z, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* A D B; & huic adſcripta *paraboliformis* A F B, cujus exponens $\frac{n}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu A D, ducta conficit *poteſtatem* ordinatæ, ceu D B) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur G E ad D B parallela, & ad G E poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi A F B coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergo *paraboliformis* A F B *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{\frac{n}{m}} \sqsubset GE^{\frac{n}{m}}$; hoc eſt $p^{\frac{n}{m}} \times AG^{\frac{n}{m}} \sqsubset q^{\frac{n}{m}} \times AG^{\frac{n}{m}}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{\frac{2n-2m}{m}} = ZD^{n} \times AD^{\frac{n-2m}{m}}$. & $q^{\frac{2n-2m}{m}} = ZG^{n} \times AG^{\frac{n-2m}{m}}$. unde $ZD^{n} \times AD^{\frac{n-2m}{m}} \sqsubset ZG^{n} \times AG^{\frac{n-2m}{m}}$, quare $ZD^{n} \times AD^{\frac{n-2m}{m}}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^{\frac{1}{3}} = ZD^{\frac{1}{3}} \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^{\frac{1}{3}} = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{3} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{\frac{1}{5}} = ZD^{10} \times AD^{4}$. vel $p^{2} = ZD^{5} \times AD^{5} = ZD^{5} \times BD^{5}$. & $AD = \frac{3}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis Z A; & huic inſcripta *paraboliformis* A F B cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur E G ad B D parallela; & ad E G conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi A F B coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* A F B *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^{\frac{n}{m}} \sqsupset GE^{\frac{n}{m}}$; hoc eſt $p^{\frac{n}{m}} \times AG^{\frac{n}{m}} \sqsupset q^{\frac{n}{m}} \times AG^{\frac{n}{m}}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{\frac{2n-2m}{n}} = \frac{ZD^{2m}}{AD^{2n-2m}}$: & $q^{\frac{2n-2m}{m}} = \frac{ZG^{2m}}{AG^{2n-2m}}$, unde erit $\frac{ZD^{2m}}{AD^{2n-2m}} \sim \frac{ZG^{2m}}{AG^{2n-2m}}$, quare $\frac{ZD^{2m}}{AD^{2n-2m}}$ est minimum. Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n=2$; & $m=3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD^3} = \frac{BD^3}{AD^3}$, & $p = \frac{BD^3}{AD^q} = \frac{ZD^q}{BD}$. Item AD = CA.

2. Sit $n=3$; & $m=4$; erit $p^3 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^4}{AD^3} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^3}$; Item AD = 2 CA.

3. Sit $n=5$, & $m=8$; erit $p^{\frac{6}{5}} = \frac{ZD^8}{AD^2}$, vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD^3} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^3}$. Item AD = $\frac{2}{3}$ CA.

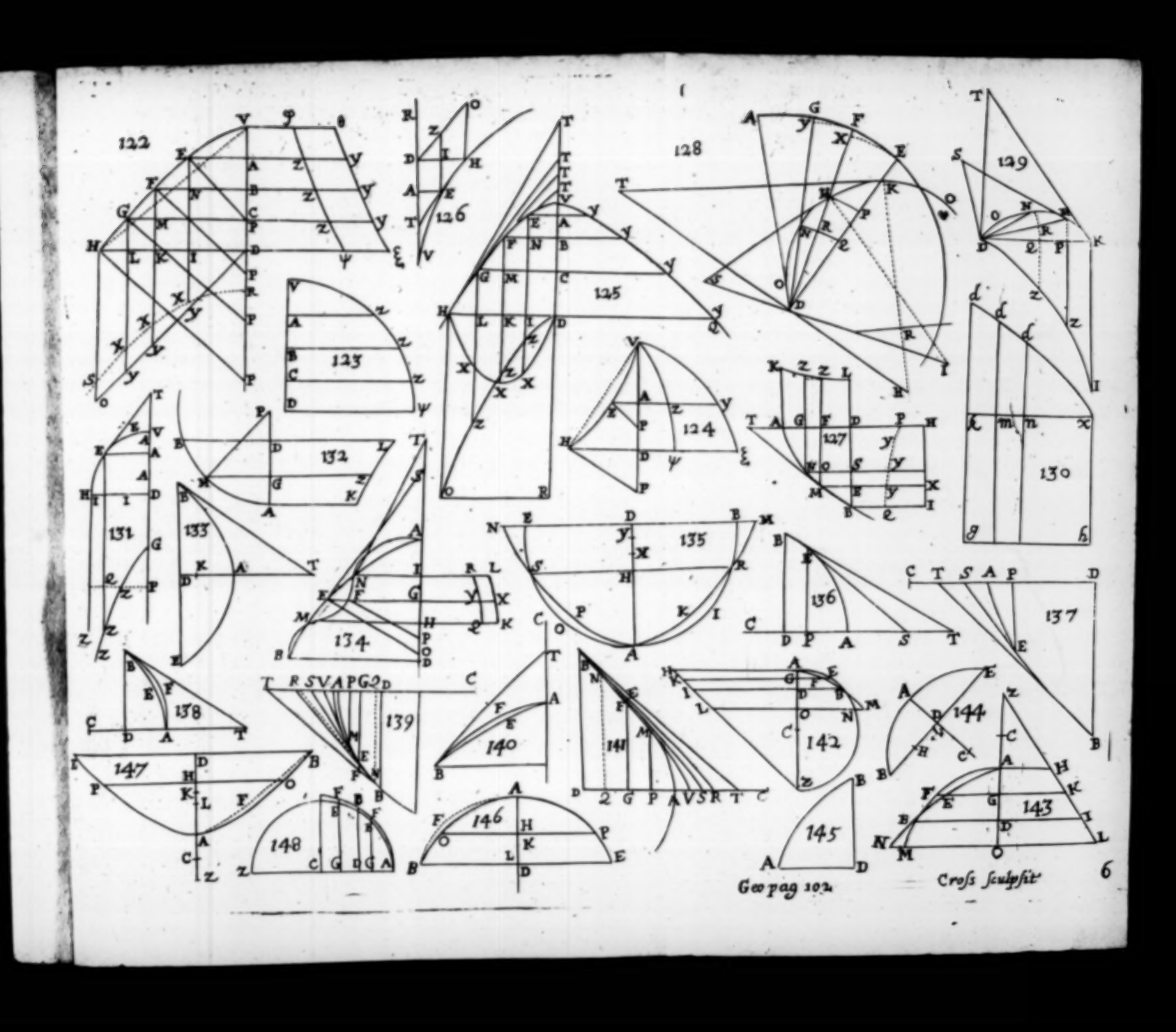
Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν: Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB.BY ⊏ GN.NS. Similíque de causa est NM.MR ⊏ GN.NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG.BY + MR + NS ⊏ GN.NS; hoc est arc. GB.BH ⊏ GN.NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircòq; junctè est GN.NS ⊏ arc. AG.GE. quapropter erit GB.BH ⊏ AG.GE. permutandòque GB.AG ⊏ BH.GE. quare componendo est AB.AG ⊏ BD.GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.



Geo pag 102.

Cross sculpsit.

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta PN æqualis *Arcui* AM; sit demum *axe* AD, *basi* DE descripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta PN parabolam in O; & connectantur subtensæ AB, AM; estque DE. PN :: arc. AB. arc. AM ⊏ AB. AM :: DE. PO. quare PN ⊐ PO; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* ADB, ADE *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{2CA \times DB}{2CA + CD} \sqsupset$ arc. AB. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. AB = 30 grad. sitque 2CA = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatisque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *sinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, basin DE statuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas positas secans, ut cernis; connectantúrque *subtensæ* AB, AM; estque DE. PO :: AB. AM :: curv. AE. AN ⊏ DE. PN; adeoque PO ⊐ PN. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2CD} \sqsubset$ arc AB.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2CA = 113; è regula hac confectatur fore *totam circumferentiam* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cycloïs* hoc adnotabo *theorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium* AEG

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longius evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *ſegmentum* A I M D ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam ſit A R ad AG perpendicularis, ac ipſi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducaturque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* A L N G; hæc (uti ſatis manifeſtum) intra arcum A K N tota cadet. Eſt autem ſegm. A I M D. ſegm. A L N D:: D M. D N. ergo ſegm. A I M D. ſegm. A K N D ⊐ DM. DN.

Fig. 154. XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore F T ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit F I ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur I S = FV; & connectatur V S, cui DC productæ occurrat in X; & connexa TX ipſi FI occurrat in R. & cùm ſit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi F T congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, ſit R S. R M :: G E. G F; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G :: G L. G H, & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154. *Corol.* Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra, & fiat EG. FG :: GL. GH, & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ, è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm DEC ad ſegm circulare DOFC. rationem habet majorem, quam GE ad GF: Quod. E. D.

LECT.

LECT. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbiſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam α C curvæ V B, α μ curvæ A M, μ ν *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam α C applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparata Communia.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, α φ δ tales, ut F Z ipſi M P, & μ φ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* α C δ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N. N R :: P M. M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) μ ν × μ φ = F G × F Z, ſeu rectang. μ θ = rectang. F H; ſpatium verò α C δ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia μ ϑ; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæra*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidumque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iisdem stantibus, sit curva AYI talis, ut ordinata FY sit inter congruas FM, FZ proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* ADI circa axem AD converso procreatur.

Fig. 156, 157.

Nam est MN. NR :: PM. MF :: PM × MF. MFq :: FZ × FM. MFq. unde MN × MFq = NR × FZ × FM; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propositum.

V. Simili ratione colligetur, si FY ponatur inter FM, FZ *bimedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam AD. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156, 157.

VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva VXO talis, ut EX ipsi MP æquetur; & curva $\omega\xi\downarrow$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi PF; erit spatium $\alpha\omega\downarrow\zeta$ æquale spatio DVOB.

Fig. 156.

Nam est MN. MR :: MP. PF; adeoque MN × PF = MR × MP. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. ET = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156.

VII Subnotetur hoc : Si curva AB sit *Parabola*, cujus *Axis* AD, *parameter* R; erit curva VXO *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq$). item *spatium* $\alpha\zeta\downarrow\omega$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam AMB dari; & viciſſim. Hoc obiter.

Fig. 157.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\omega\xi\downarrow$ æquari rectangulis omnibus ex PF, EX ad rectam DB applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis $PFq \times EX$; ac ità porrò.

Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ PMQ) si ponatur FZ æqualis ipsi PQ, & $\mu\varphi$ ipsi AQ, *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* ADLK æquari.

Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA ; erit MN × QA = NR × QA ; hoc eſt rectang. μθ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, ſintque curvæ DXO, αφδ tales, ut EX æquetur ipſi MT, & μφ ipſi MF ; erit ſpatium αζβ æquale *ſpatio* DXOB. Fig. 158. 159.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT ; hoc eſt μφ × μφ = ES × EX ; unde patet.

XI. Hinc rurſus, *ſuperficies ſolidi ex ſpatii* ABD circa axem AD converſione progeniti ad *ſpatium* DXOB ſe habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium* ; hoc igitur noto ſimul illa innoteſcet. unde rurſus *Sphæroidum, Conoidumque ſuperficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut ſit EY = √EX × MF ; erit *ſolidum ex ſpatio* αζβ circa axem αζ rotato factum æquale *ſolido, quod ex ſpatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim eſt MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc eſt μφ × μφq = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque poteſtatum*) ex ordinatis μφ *ſummas* cum *ſpatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea linæ AZK, αξλ tales, ut FZ ipſi MT, & μξ ipſi TF æquentur ; *ſpatium* αζλ æquabitur *ſpatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF ; hoc eſt μφ. FG :: FZ. μξ. quare μφ × μξ = FG × FZ. Fig. 158. 159.

XV. Etiam *ſumma quadratorum* ex applicatis μξ æquatur *ſummæ Rectangulorum* ex TF, FZ ; & *ſumma Cuborum* ex μξ æquantur ipſis TFq × FZ (ad rectam ſcilicet AD computationem exigendo) parique quoad cæteras poteſtates modo. Fig. 158, 159.

XVI. Rurſus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis ; ſitque recta ζδ æqualis ipſi BD, & compleatur *Rectangulum* αζδχ, tum curva KZL talis ſit, ut FZ ipſi QP æquetur ; erit *rectang.* αζδχ æquale *ſpatio* ADLK. Fig. 160, 161.

Nam eſt MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ ; hoc eſt μφ × μξ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $C\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $aC\gamma\downarrow$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $aC\gamma\downarrow$.

Nam MN. NR :: YT. DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX. $\mu\beta$. & $\mu\nu \times \mu\beta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $C\beta = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF. MP :: R. FX; erit *rectangulum* $aC\beta\xi$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN. NR :: MP. MF :: FX. R. adeóque MR × R = NR × FX; ſeu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (διαγραμματικὰς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD, & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sis. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z; ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GF I, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Fig. 163.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D, & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* $AK = Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^4}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïdi*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

Hic demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum procline foret turgidum Volumen compingere (*amice tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *circuli Quadrans* ACB, quam tangant rectæ AH, BG, & in productis HA, AC sumantur AK, CE singulæ pares *radio* CA; & *asymptotis* AC, CZ per K descripta sit *Hyperbola* KZZ; *asymptotis* BC, BG per E *hyperbola* LEO. Sumatur etiam in arcu AB Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur rectæ CMS (tangenti AH occurrens in S) recta MT circulum tangens; recta MFZ ad BC parallela, recta MPL ad AC parallela. Sit denuò recta $\alpha\zeta$ æqualis *arcui* AB, & $\alpha\mu$ arcui AM; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu$ $\omega\downarrow$ rectæ $\alpha\zeta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\downarrow = CS$; $\mu\omega = MP$.

I. Recta CS æquatur rectæ FZ; adeoque *summa secantium ad arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* AFZK.

Est enim CF. CA::(CM. CS::) CA. CS. adeòque CF × CS = CAq. item CF × FZ = CA × AK = CAq. ergo CS = FZ.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* AM ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* AFZK.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III. Curva AXX talis ſit, ut PX ſecanti CS (vel CT) æquetur; *ſpatium* ACPX hoc eſt *Summa ſecantium ad arcum* AM pertinentium, & ad CB applicatarum) æquatur *duplo ſectoris* ACM.

Nam (a) *ſpatium* AFMX *Segmenti* AFM *duplum* eſt; & *rect-angulum* FCPM *Trianguli* FCM. ergò *totum ſpatium* ACPX totius *ſectoris* ACM duplum eſt. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè conſtat.

IV. Curva CVV talis ſit, ut PV *Tangenti* AS æquetur; erit *ſpatium* CVP (hoc eſt *ſumma tangentium ad arcum* AM *pertinentium*, & ad rectam CB applicatarum) æquale *ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* AM. Fig. 166.

Manifeſtè confectatur ex ſeptima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ CQ = CP; & ductâ QO ad CE parallelâ (quæ *hyperbolæ* LE occurrat in O) erit *ſpatium hyperbolicum* PLOQ ductum in *radium* CB (ſeu *cylindricum* ad baſin PLOQ, altitudine BC (duplum *ſummæ quadratorum* ex rectis CS, ſeu PX ad *arcum* AM pertinentibus, & ad rectam CB applicatis. Fig. 166.

Nam quia PL. QO :: (BQ. BP. hoc eſt ::) BC + CP. BC − CP; erit componendo PL + QO. QO :: 2BC. BC − CP. item eſt QO. BC :: BC. BC + CP; ergò (pares rationes adjungendo) eſt PL + QO. QO + QO. BC = 2BC. BC − CP + BC. BC + CP; hoc eſt PL + QO. BC :: 2BCq. BCq − CPQ (hoc eſt ::) 2BCq. PMq. verùm eſt PXq. BCq :: BCq. PMq. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq. PMq. ergò PL + QO. BC :: 2PXq. BCq. vel PL × BC + QO × BC. BCq :: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque BC in omnes PL + QO ducta adæquat omnia totidem PXq. unde conſtat Propoſitum.

VI. Hinc ſpatium αγμ (hoc eſt *ſumma ſecantium in arcu* AM ad αC applicatarum) æquatur *ſubduplo ſpatio hyperbolico* PLOQ. Fig. 167.

Nam ſumatur arcus MN indefinitè parvus, & huic æqualis recta μν, ducatúrque recta NR ad AC parallela. Eſtque MN. MR :: (MC. CF :: CS. CA :: PX. CA ::) PXq. PX × CA. adeóque MN × PX × CA = MR × PXq. ſeu μν × μγ × CA = MR × PXq. atqui (ex præcedente) omnium MR × PXq ſumma ſpatii PLOQ in CA ducti ſubdupla eſt. Ergò omnia totidem μν × μγ in CA ducta eidem ſubduplo æquantur. quare ſpatium αγμ (omnibus

nibus $\mu\gamma \times \mu\downarrow$ par) æquatur subduplo spatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\downarrow$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicatis) æquant $CA \times CP \times PX$ (hoc est *parallelipipedum Basi Rectangulo* ACPD, *Altitudini* CS).

Hujus *Effati demonstrationem* (quanquam $\pi\epsilon\rho\iota\chi\pi\sigma\nu$) transilio; quoniam aliud *Sebenno* discursúmque præ reliquis pleríſque longiuſculum expoſcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis ſit, ut FY æquetur ipſi AS, ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *ſpatium* ACIYYA (hoc eſt *ſumma Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *ſubduplo ſpatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 2. Lect. XII. (b) 14. Lect. XII. Nam *ſpatium* $\alpha\gamma\sigma\mu$ (*a*) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc eſt *rectangulo* FCIY (nam eſt CA. AS :: CF. FM, vel CA. FY :: CF. CP. adeoq; $CA \times CP = FY \times CF$). item ſpatium $\gamma\sigma\downarrow$ (hoc eſt omnes rectæ TF ad αC applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (*b*) æquatur *ſpatio* AFY; ergo *ſpatium* ACIYA æquatur *ſpatio* $\alpha\gamma\downarrow\mu$; hoc eſt (ut mox oſtenſum) *ſemiſſi ſpatii hyperbolici* PLOQ.

Aliter illud, (eique connexa) dimenſus ſum, *hoc præmiſſo Lemmate.*

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI, & ad hos ordinatæ KI, KD, ſit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè ſumpto puncto R, ductáque recta RVS ad DC parallelâ, ſint SR, CE, SV continuè proportionales, connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Eſtque CH. CE :: CE. CT. quare CT = SV, vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum eſt *ſegmenti* EDK. item *rectangulum* IKDC *trianguli* CDK duplum eſt, ergo *reliquum ſpatium* CEYI *reliqui ſectoris* ECK duplum eſt.

10. Lect. XI.

Fig. 169. X. Reſumptâ jam quadrante circulari ACB, ſit CE = CA, & axe AE, *parametro* etiam AE, deſcripta ſit *Hyperbola* EKK, poſitóque curvam AYY talem eſſe, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, ſit FY tangenti AS æqualis, ducatur recta YIK (rectam CZ,

C a secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C Iq. C Aq :: A Sq. C Aq :: F Mq. C Fq :: C Aq — C Fq. C Fq. componendoque, C Iq + C Aq . C Aq :: C Aq. C Fq. hoc est (ex *hyperbola* natura) I Kq. C Aq :: C Aq. C Fq. vel I K. C E :: C E. I Y. itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.

XIII. Nescio, an *opera* sit hoc adjicere *Corollarium*.

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E ; ductáque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* A E O Y Z P A (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* C E X. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K ; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T. & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B ſumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z ſecet in Z, ſit M Z = A S) in rectâ verò $\alpha\zeta$ ſumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* A M *ſinubus verſis* A F; erit *ſpatium trilineum* M A Z *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum.*

Nam ſumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Eſtque jam A S. A B (2 C M) :: (F M. F B ::) A F. F M. & 2 C M. 2 M N :: C M. M N ::) F M. N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N :: A F. N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc eſt N R × M Z = $2\mu\nu\times\mu\xi$. unde *ſpatium* M A Z *duplo ſpatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ dimenſio vulgò nota ſit, & è ſuprà poſitis
Fig 172. etiam facilè deducatur; habetur *ſpatii ciſſoidalis* M A Z *dimenſio.* calculum ineat qui volet.

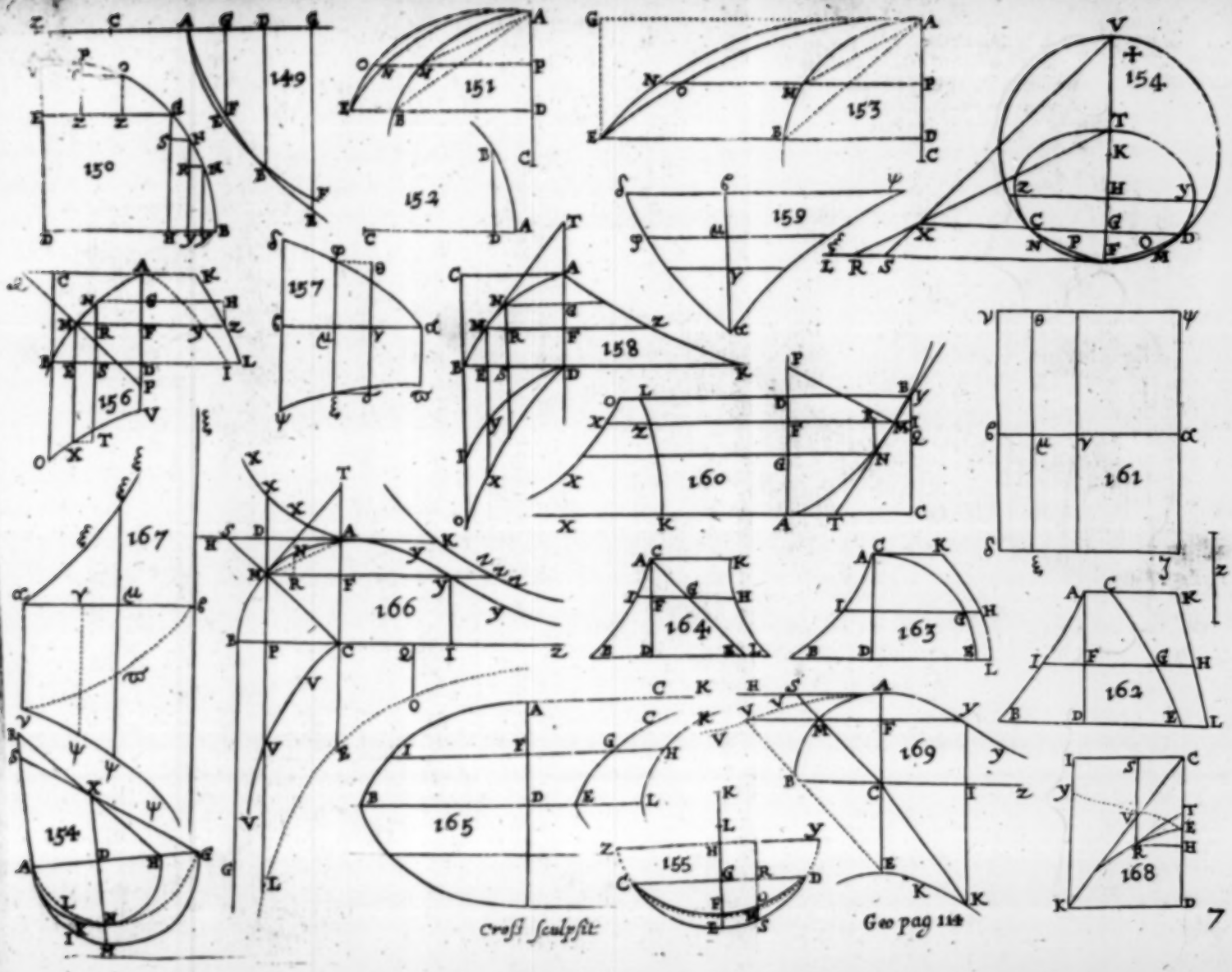
Iſta claudet hoc *Corollariolum*:

Fig. 173. XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G; ſintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (a) ſuperiùs. arcus verò ſumptus A M in partes diviſus concipiatur indefinitè multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *ſumma rectarum* N X (in radiis) æquatur ſpatio $\frac{A F Z K}{Rad.}$; & *ſumma rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur *ſpatio* $\frac{P L Q O}{3\ Rad.}$.

(a) 7, & 12.

Nam triangulum X M N triangulo S A C ſimile eſt; & inde X M. M N :: A S. C A. & X N. M N :: C S. C A. unde $XM = \frac{MN\times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN\times CS}{CA}$. & ità in reliquis; unde liquet Poſitum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-


149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
Crasi sculpsit
Geo pag 114
7

APPENDICULA 2.

BRevitati simul ac perspicuitati (huic autem præcipuè) consulentes præcedentia recto discursu comprobata dedimus; quali non modo veritas, opinor, satis firmatur, at ejusdem origo limpidiùs appareret. Verùm nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adsuetus, hæreat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiantur, quorumque subsidio non difficilè conficiantur *Propositorum demonstrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, singulæ designatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (simul acceptarum) ad *omnes consequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam sint rationes A ad M, B ad N, C ad O singulæ æquales rationi R ad S. ergò X ⊐ M; & Y ⊐ N; ac Z ⊐ O. patet igitur fore A + B + C. X + Y + Z ⊏ A + B + C. M + N + O. hoc est A + B + C. X + Y + Z ⊏ R. S.

II. Hinc patet, si quotlibet rationes singulæ designabili quâcunque majores sint, *antecedentium summam ad summam consequentium* etiam designabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D ; curvam verò tangat recta B T ; ſitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva ; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam ſecans ad N ; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis deſignabili, puta quàm R ad S.

Nam ſit D E . E T :: R S ; connexaque recta B E curvam ſecet in G, rectam P O in K ; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, eſt B P ⊐ B F ; adeóq; P K ⊐ P N (nam ſubtenſa B G intra curvam tota cadit) . ergo P N. N O ⊏ P K . K O :: D E . E T :: R . S.

IV. Hinc, ſi baſis D B in partes ſecetur indefinitè multas ad puncta Z ; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam ſecantes punctis E, F, G ; per hæc verò ducantur *tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T ; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (ſimul ſumptas) rationem quâvis aſſignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (ſingulæ ad ſingulas ſibi in directum poſitas reſpectivè) rationem deſignabili quâcunque majorem. ergò ſimul omnes iſtæ ad has ſimul omnes *rationem* habent deſignabili quâvis *majorem* ; hoc eſt recta A D ad E Q + F R + G S + A T ejuſmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T ſimul acceptæ nihilo æquivalent ; ſeu rectæ Z E, Z Q ; & Z F, Y R, &c. æquantur ; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. reſpectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quaſi coincidentes haberi poſſunt. quin & adſumere tuto licet, quæ evidenter his cohærent.

VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc
Fig. 176. applicata D B ; æquiſecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B interſecantes punctis X ; quibus occurrant per ipſa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H ; ſit autem ſegmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenſo) *circumſcripta figura* A D B M X N X O X P X R A major *ſpatio* quodam S ; dico *ſegmentum* A D B non eſſe minus quam S.

Nam ſi fieri poteſt ſit A D B minus quàm S exceſſu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R eſt indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus eſſe *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus eſſe *figurâ circumſcriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindeque majus eſt *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergo *ſegmentum* ADB una cum *rectangulo* ADLK multo majus eſt *figurâ circumſcriptâ*; hoc eſt, *ſpatium* S majus eſt *figurâ circumſcriptâ*, contra *Hypotheſin*. Fig. 176.

VII. Item, ſi ponatur *figura inſcripta* HXGXFXEXZDH minor *ſpatio quodam* S; dico *ſegmentum* ADB non eſſe majus quàm S.

Nam ſi majus eſſe velis, eſto rurſum *exceſſus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (ſicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Eſt autem *ſegmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inſcriptâ. ergò ſegmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inſcriptâ figurâ; hoc eſt *ſpatium* S minus eſt inſcriptâ figurâ, contra *Hypotheſin*.

VIII. Hinc, ſi *ſpatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumſcripta figura æquetur *figura* ADBMNOPRA; nec non cui *inſcripta figura æquetur figura* HGFEZDH; palam eſt *ſpatium* iſtud S *ſegmento* ADB exæquari.

Nam (uti mox oſtenſum) hoc illo majus eſſe nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumſcriptionis* ac *inſcriptionis modos* accomodari. ſuffecerit innuiſſe.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

SIt *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc ſignatum punctum C, ad ipſum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva ſumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; ſit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipſi MG perpendicularis; nam ſi ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam eſſe, adeoque GM eidem rectæ erit) Porrò ſit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ ſecet ordinatam. Fig. 177.

dinatam B D in I, & lineam R S in X) ſit M P . M E :: V G . I X; vel, ſit linea A L talis, ut ductâ M P Y ad B D parallelâ (quæ ſecet axem A D in P, & lineam A L in Y) ſit P E . M E :: V G . P Y; erit
Fig. 177. tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) B R S D, vel A D L duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex rectâ per V & curvam A M B mota progeneratur.

Nam ſumatur M N indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ N O K T ad ipſam A D, & N Q Z ad B D parallelæ (quæ lineas expoſitas, ut *Schema* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ V M, V N. eſtque M O . M N :: M P . M E :: V G . I X. quare M N × V G = M O × I X = I K × I X. Item eſt N O . M N :: P E . M E :: V G . P Y. unde M N × V G = N O × P Y = Q P × P Y. Eſt autem M N × V G duplum trianguli M V N. quapropter tam I K × I X, quàm Q P × P Y duplum eſt *trianguli* M V N. pariter autem ubique ſit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva A M B *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque C V = C A = *r*. & C P = *x* (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ M C; patet eſſe $E C = \frac{rr}{x}$; & $M Cq = 2xx - rr$ (nam $P Mq = xx - rr$) item eſt M Cq. C Pq :: M Eq. M Pq; hoc eſt M Cq. C Pq :: E Cq. C Gq. hoc eſt $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx} . CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare V G . V A :: (C P . M C) :: M P . M E. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit I X = V A, *lineam* R S fore *rectam*; & *rectangulum* B R S D *ſuperficiei conicæ* A M B V *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Jeſſopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A*m coni recti* A B C*p* recta infinita E C tranſeat per *coni ſuperficiem*, & quieſcente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut ſemper aliqua pars ejus ſecet *coni ſuperficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in ſuperficie coni ſitas) *ſolidum comprehenſum à ſuperficie vel ſuperficiebus genitis à linea* E C ſic mota & à *portione ſuperficiei* ejuſdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata deſcribit in *ſuperficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* eſt æqualis *perpendiculari* E*n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *baſis* verò æqualis eidem *ſuperficiei conica terminata* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C conſtat ex *infinitis pyramidibus* E C*o* A E*o o* A, &c. æqualtis perpendiculari E*n*, quarum baſes omnes ſimul ſumptæ, exhauriunt *ſuperficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus ſit *Conus rectus* A B C*p* ſecetur à plano C F D axi A*m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & ſuper *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*, ſitque E*d* plano A C D perpendicularis, & E*n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita ſe habet ad A C D *baſem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E*d* *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E*n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano baſi C F D (quæ eſt utrique Conico communis) parallelo ergo ſunt æquales. Si ergò à ſolido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit ſolidum E C F D A C quale in propoſitione prima deſcribitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ ſunt *baſes altitudinibus*, ut *altitudo* E*d* *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E*n* ita erit *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus ſit *Conus rectus* A B C p. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum ſecabit *axem coni* in puncto *q* ſupra *verticem* productum & in communi interſectione cum *ſuperficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S t ducantur à vertice coni A rectæ A r, A t, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita ſe habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quieſcente termino *q* per lineas *r t*, *t* A, A *r* generat tres *ſuperficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *ſuperficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *ſolidum æquale* eſt *pyramidi* cujus *altitudo* eſt æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt ſolidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc ſolidum *q r s t* A *r* poteſt conſiderari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *baſi figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *baſes altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *ſuperficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus ſit *Conus rectus* A B *b g* ſecetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* ſecat *axem coni*, demittatur H K *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à vertice A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata a lineis F E G G A A F ita ſe habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo ſuperior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapſa, quæ forſan ex uſu ſit adjicere. *Demonſtrationes* elicere poterit quiſpiam è præmiſſis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc ſignatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut ſi ducta utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG ſecet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; ſit TM ipſi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD ſumptum, protendatur recta RZ ad ipſam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP ſumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum ſit rectangulum ex AR, & PM æquale ſpatio AYYP (ſeu $PM = \frac{\text{ſpat. AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propoſitam.

Adnotari poteſt, ſi ſtantibus reliquis, ſit curva QXX talis, ut cum hanc ſecet recta EP in X, ſit PX = AS; erit ſpatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, ſeu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ducta EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; deſignetur curva AMB talis, ut ſi producta recta EPM hanc ſecet in M, ipſamque tangat recta MT, ſit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis ſit, ut ſi hanc ſecet producta PE in Y, ſit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd ſi curva QXX talis ſit, ut PX = DS (vel ſi AQ = AD, & QXX ſit *hyperbola* angulo ADG comprehenſa) erit curva AM × AD = ſpat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut ſi à quocunque puncto in ipſa ſumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, ſit A E inter deſignatam A R, & A P proportione media, ſecundum ordinem, cujus exponens ſit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n . m :: A E . \text{arc. } A M$.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E ſit inter A R, A P ſimpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Cicloïs primaria*; hujus igitur dimenſio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehenſivo peraguntur.

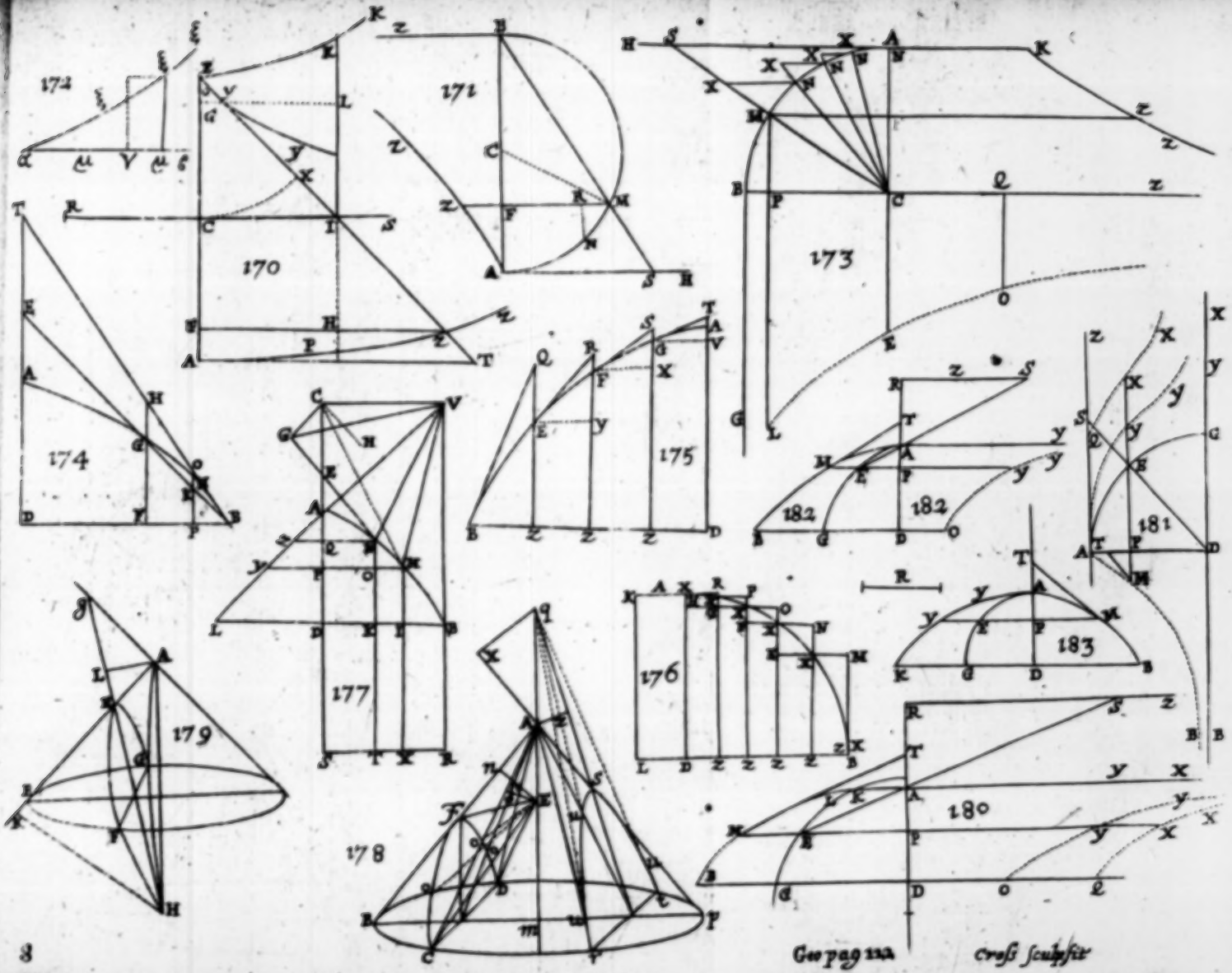
Probl. II.

Fig. 183. Curva deſignetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac ſumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & poſito rectam M T ipſam tangere, habeant T P, P M relationem aſſignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem aſſignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe ſumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) ſic ut per ejuſmodi puncta Y tranſeat curva Y Y K; tum ſi fiat $P M = \frac{\text{ſpat. A P Y}}{R}$; de curvæ A M B indè conſtabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur deſignatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum ſit, juxta præſcriptum, R. arc. A E :: R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur $P M = \frac{A P Y}{R}$ *Exemp.*



Geo pag 112 Cross sculpsit

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs G E; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R :: R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R :: R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium L E X H æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & 0 (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* L E X H; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. A D L K = R × D L − D O. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\text{ cub.} - DO\text{ cub.}}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque φ ↓ ad A D, & φ ξ ad D L perpendiculares, fore φ ↓ = $\frac{DL + DO}{4}$, & φ ξ = R − $\frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuò curva A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circuli sectoris* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiátque D K . R :: R . P; tum D K . P :: D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter o (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proportionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac ò, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac o sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hyperbolici spatii Cyclissimum* dari, vel *Circuli hyperbolissimum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallisius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Fig. 188. Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut si utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T . D M :: R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{R \times DN}$; sumptâque liberè rectâ

rectâ DB, ſit DB.R::R.BF (ſit autem BF, ut & DH ipſi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH incluſa, tranſeat *hyperbola* FXX, ſitque ſpatium BFXI (poſitâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo ſpatio ZDL, ſit denuò DM = DG, erit M in curva quæſita; quam utique ſi tangat recta TM, erit TD.DM::R.DN.

Probl. VI.

Sit rurſus ſpatium EDG (ut in præcedente) reperienda eſt curva AMB, ad quam ſi projiciatur recta DNM, & ſit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adſumatur quæpiam R, & ſit $DZ\ q = \frac{R^3}{DN}$, item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$, & per F intra *aſymptotos* DB, DH deſcribatur *hyperboliformis* ſecundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, ſint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur ſpatium BIXF æquale duplo ZDL; & ſit DM = DI, erit M in curva quæſita; quam ſi tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum ſit (ſeu expreſſum quomodocunque) ſpatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâcunque R, ſit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ.PO::R.PM.

Exemp. AP vocetur x & ſit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Eſtque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} :: r . \frac{1}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB eſt *Parabola*, cujus *Parameter* eſt $\frac{1}{2}r$. *Aliter*.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2\,APM}$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola.*

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum sit spatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σκύψιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Alord.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL describatur *Circulus* LXX; sit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, sit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CL^q}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{spat. } DKZP}{CL}$ (vel sector LCX subduplus spatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$; erit linea $c\mu\mu$ ipsius BMA involuta; vel spatium $C\mu c$ spatii ADB.)

Exemp. Sit A D B circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonstratis constat) spat. DKZP (2 sector LCX). sect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu c$ est rectus, adeóque linea $c\mu C$ est *semicirculus*.

Coroll. 1. Subnotari potest, si duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involutæ* sint $C\mu c$, $C\gamma$; & fuerit $C\mu . C\gamma :: DB . DG$; erit reciprocè ang. $cC\mu . cC\gamma :: DG . DB$. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ $C\gamma\chi$, CSc suo modo analogæ fuerint, hoc est, si utcunque à C projectâ rectâ $C\gamma S$, habeant $C\gamma$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ similium linearum *involutæ*. Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $cC\gamma$ rectis Cc, $C\gamma$, & aliâ lineâ $c\gamma$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* designare. Fig. 195.

Centro C utcunque describatur *circularis arcus* LE (cum rectis Cc, $C\gamma$ constituens sectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, sit curva cYH ità rectam CK respiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, sumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, sit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA sic referatur curva BMF, ut cùm sit $DP = \frac{\text{spat. } CcYO}{CL}$, & PM ad DA perpendicularis; sit etiam $PM = C\mu$, erit spatium DBFA ipsius $Cc\gamma$ *evolutum*. Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C descripti, & $c\mu C$ ejusmodi *spiralis* Fig. 197.

ſpiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem aſſignatam (puta R ad S) Manifeſtum eſt lineam C Y H eſſe rectam, quoniam E Z (K O). C μ (O Y) :: R. S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D ſe habent ut ſpatia K O Y, K C c, hoc eſt ut quadrata ex ipſis O Y, C c, vel ex ipſis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram c C φ erigatur *cylindricum* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iſte *cylindricum* æqualis *ſolido*, quod procreatur è figurâ C c H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) & curva A Z I talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, ſit P Z = √ 2 A P M, ſit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adſumptâque rectâ R, ſit Z P q . R q :: P M . P Y, ſitque denuò D L.
Fig. 199. R :: R . L E. & per E intra angulum L D G deſcribatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit ſpatium P D O Y æquale *ſpatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *ſumma* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, baſis D B, & curva K Z L talis, ut adſumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, ſit √ A P M . P M :: R . P Z, erit ſpatium A D L K
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 √ A D B; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit ſumma omnium $\frac{PM}{APM} = \sqrt{2DA \times \text{arc. } AB}$.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) ſintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B ſumpto quopiam

am puncto M, ductisque rectis MPX ad BD, & MQY ad AD parallelis, positóque rectam MT tangere curvam AMB, sit TP. PM :: QY. PX; erunt figuræ ADKE, DBLG sibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc conversum. Nempe si figuræ ADKE, DBLG æquentur, & MT curvam AMB tangat, erit TP. PM :: QY. PX.

Not. Omnium hactenus Propositorum fœcundissimum est hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè consectantur. Nam posito lineam AMB indeterminatam esse naturâ, si ipsarum EXK, GYL alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea GYL ponatur recta cum ipsi BD semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si GYL sit recta ad DB parallela, emerget *Lectionis ejusdem*. Rursus si PM = PX (vel lineæ AMB, EXK sint eædem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porrò liquet adsumpto cuilibet spatio *infinita, genere diversa, spatia æqualia* facilè designari veluti si *spatium* DGLB ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva AMB sit *parabola*, cujus *axis* AD, emerget curvæ EXK hæc proprietas, ut (si dicatur DB = r; AP = x; PX = y; & k (vel $\frac{DB^q}{2AD}$) sit *parabola semiparameter*) sit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin AMB ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva EXK. his autem expensis ἀβακιστὴν meam incuso, qui non hoc *Theorema* (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & suppar usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subjiciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi *Phrygiam sapientiam* juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus. Fig. 202.

Theor. V.

Sit spatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curva AMB comprehensum) sint item curvæ EXK, GYL ità relatæ, ut si in curva AMB liberè sumatur punctum M, ducatur DMX, sit DQ = DM, ducatur QY ad DB perdendicularis, sit DT ad DM perpendicularis, recta MT curvam AMB contingat; si, his inquam suppositis, sit TD. DM :: DM × QY. DX^q; erit spatium DGLB spatii EDK duplum. Fig. 203.

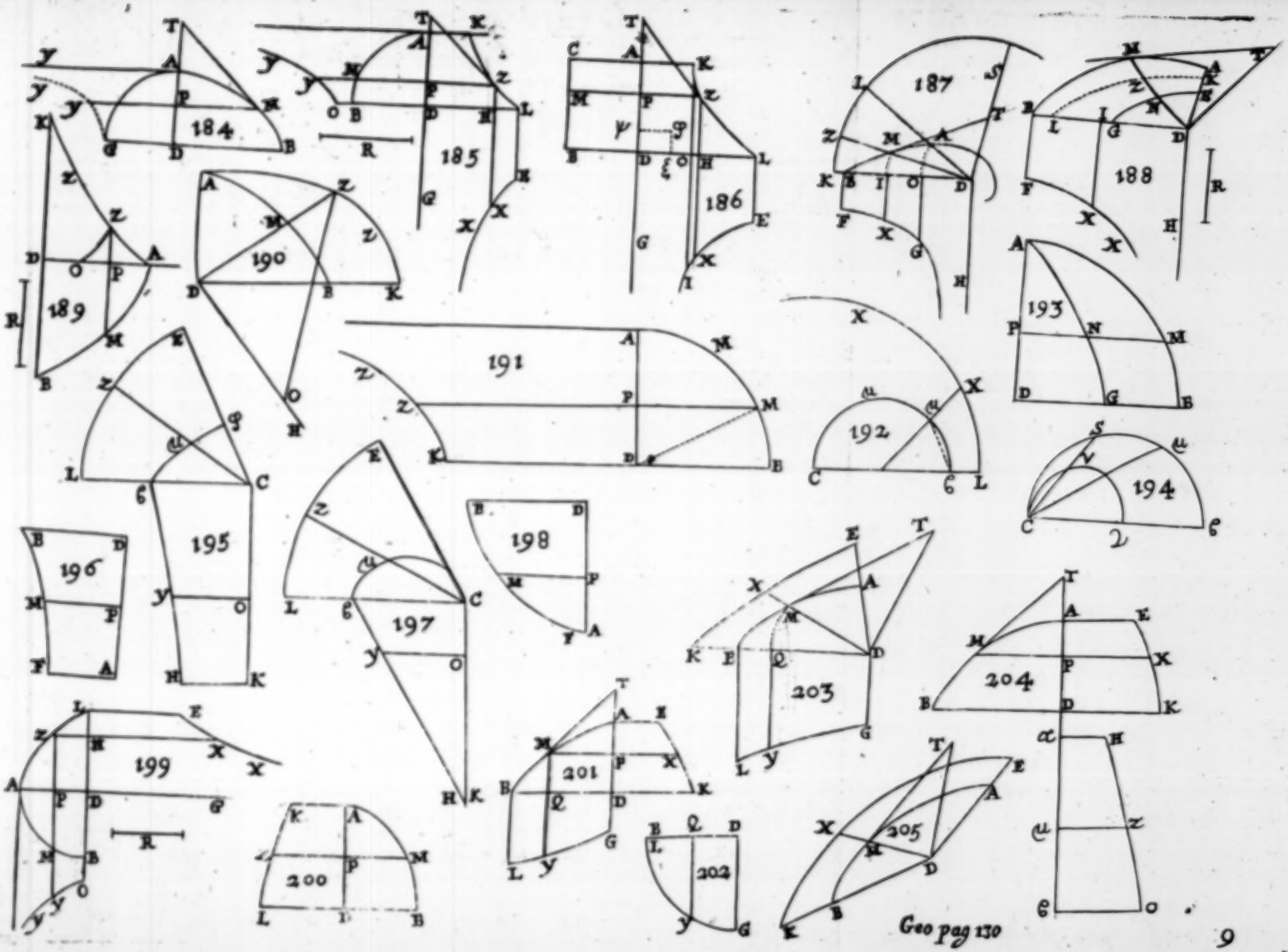
Theor. VI.

Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ $\alpha\mu$ = arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P . T M :: μ Z . P X; erunt spatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia sibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur $\alpha\mu$ = arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat; sit T D . T M :: D M × μ Z . D X q; erit spatium $\alpha\zeta$ O H spatii E D K duplum.

Sed horum hic esto terminus.


184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205

Geo pag 130

Lect. XIII.

Æ*Quationum* naturam è terminorum *analogia* expoſuit *Vieta*; illam ex eorum in ſe ductu dilucidiùs explicuit *Carteſius*. Eam ego jam è linearum ſingulis appropriatarum deſcriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui ſanè modus rem præſertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In ſequentibus perpetim ad eaſdem ſeries redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent eaſdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti *b*, & hæc verſus H indefinitè protendatur; ſint anguli R A H, S B H ſemirecti, ſintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine ſecet punctis L, M, N; rectaſque B S, A R punctis K, Z) ſit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Nam ſi A G (vel G Z) dicatur *a*; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N q q $= a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur A E = *a*; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi *a*; hoc est ipsis A G, concipiendo à singula intersectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magis à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magis increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola aquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hyperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & A P = $\frac{1}{3}$ A B, & A Q = $\frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum A L L, A M M, A N N *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{ &c.}$$

Fig. 207.

Sit rursus A B = *b*; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, uti cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter G Z,

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propoſitas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam ſi AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$, & GM cub. $= a^3 - baa$, & GNqq $= a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, ſi AE ponatur æqualis ipſi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum reſpectivæ, ſeu æquales quæſitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B verſus I infinitè excreſcunt, ſemper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL eſt *hyperbola aquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ ſunt *hyperboliformes*.

4. Si AB biſecetur in O, triſecetur in P, quadriſecetur in Q, ducanturque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *aſymptoti*.

5. Hinc ſequitur in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd ſi n ſatis magna ſit, iſtæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; ſcilicet ipſa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Fig. 280.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA ſemirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit inter AG (ſeu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propoſitas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam poſito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$, & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in AD (ad ipſam AB perpendiculari) deſumatur AE = n; & ducatur EF ad AB parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices a reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ AE (vel n) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit AE curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm EF curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum AE nempe maximam adæquet, adeóque EF curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet AE maximam excedat, adeoque nec EF curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi AO = OB, & ordinetur OT, erit OT maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, ſi AP = 2 PB, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{4}{3}$ AB, altera minor) demùm in quarto gradu ſi AQ = 3 QB, & ordinetur QX, erit QX *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{4}{3}$ AB, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa AB, vel b.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper AO (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva ALB eſt *Circuli*, reliquæ AMB, ANB eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a+b=n$	$a-b=n$.	$b-a=n$.
$a+b=\frac{nn}{a}$	$a-b=\frac{nn}{a}$	$b-a=\frac{nn}{a}$
$a+b=\frac{n^3}{aa}$	$a-b=\frac{n^3}{aa}$	$b-a=\frac{n^3}{aa}$
$a+b=\frac{n^4}{a^3}$	$a-b=\frac{n^4}{a^3}$	$b-a=\frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs, pro ſingulo trium ſerierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur iſtæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protenſa, & huic perpendicularis A D, in qua ſumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum ſint lineæ L XL, M XM, N XN tales, ut ſumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, ſit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Fig. 209, 210.

Nam ſumpta A E = *b* (ſumatur autem A E ob primam ſeriem ad partes I, ob ſecundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H ſemirectus (iſte quidem pro prima & ſecunda ſerie inclinans verſus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema ſatis monſtrat) tum rectæ E F cum expoſitis lineis interſectiones reſpectivæ radices *a* determinabunt, nempe ſi per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales reſpectivè.

Not.

Exhinc conſtat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur, ut in præcedentibus ipſa *n*.

2. In prima & ſecunda ſerie ſemper una poſitiva radix habetur, & unica.

3. In ſecunda ſerie minima radix ipſi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* eſt *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia ſerie ſubindè duæ habentur radices poſitivæ (quando ſcilicet E F curvas bis ſecat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipſarum aliquam contingat, id quod accidit in ſecundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$, in tertio cùm $a = \frac{1}{3}b$, in quarto cùm $a = \frac{1}{4}b$) aliquando nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nuſquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva eſt *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *aſymptoti* ſunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cc\,a = n^3.$$
$$a^4 + cc\,aa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG. AC :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit $GK = a + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + cc$; & $GM\,cub = a^3 + cca$; & $GNqq = a^4 + ccaa$. Fig. 211.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, posità AE = n, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX, nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{3}YX$; $Y\zeta = \frac{1}{4}YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4}YX$, & per puncta α, ζ, γ, traductæ concipiantur *hyperbolæ* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\zeta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in

in quarto $a+\frac{cc}{4a}\sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò AE (vel n) major exiſtit.

$$a+\frac{cc}{a}=n.$$
$$a+\frac{cc}{a}=\frac{nn}{a}.$$
$$a+\frac{cc}{a}=\frac{n^3}{aa}.$$
$$a+\frac{cc}{a}=\frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas LXL, MXM, NXN, quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendiculari, ſit $GL=\frac{nn}{AG}$; & $GM=\frac{n^3}{AGq}$; & $GN=\frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat ângulus HAR ſemirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & ſit GE. c :: c. EO; & per O intra aſympotos AD, AR deſcribatur *hyperbola* OO; hujuſce cum expoſitis lineis LXL, MXM, NXN interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus, erunt interceptæ AG ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{cc}{a}-a=n.\\ cc-aa=nn.\\ cca-a^3=n^3.\\ ccaa-a^4=n^4.\end{array}\right\}$$

Series ſexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = u. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI ſemirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua AC = c; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, ſit AG (vel GZ). AC :: AC. ZK, & per K, intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* KYK; tum ſint curvæ CLYHL$_\lambda$, AMYHM$_\mu$, ANYHN$_\nu$ tales, ut inter AG (vel GZ) & GK ſit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito deſervient.

Conſtat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices reſpectivè determinantur. Verùm adnotetur præterea.

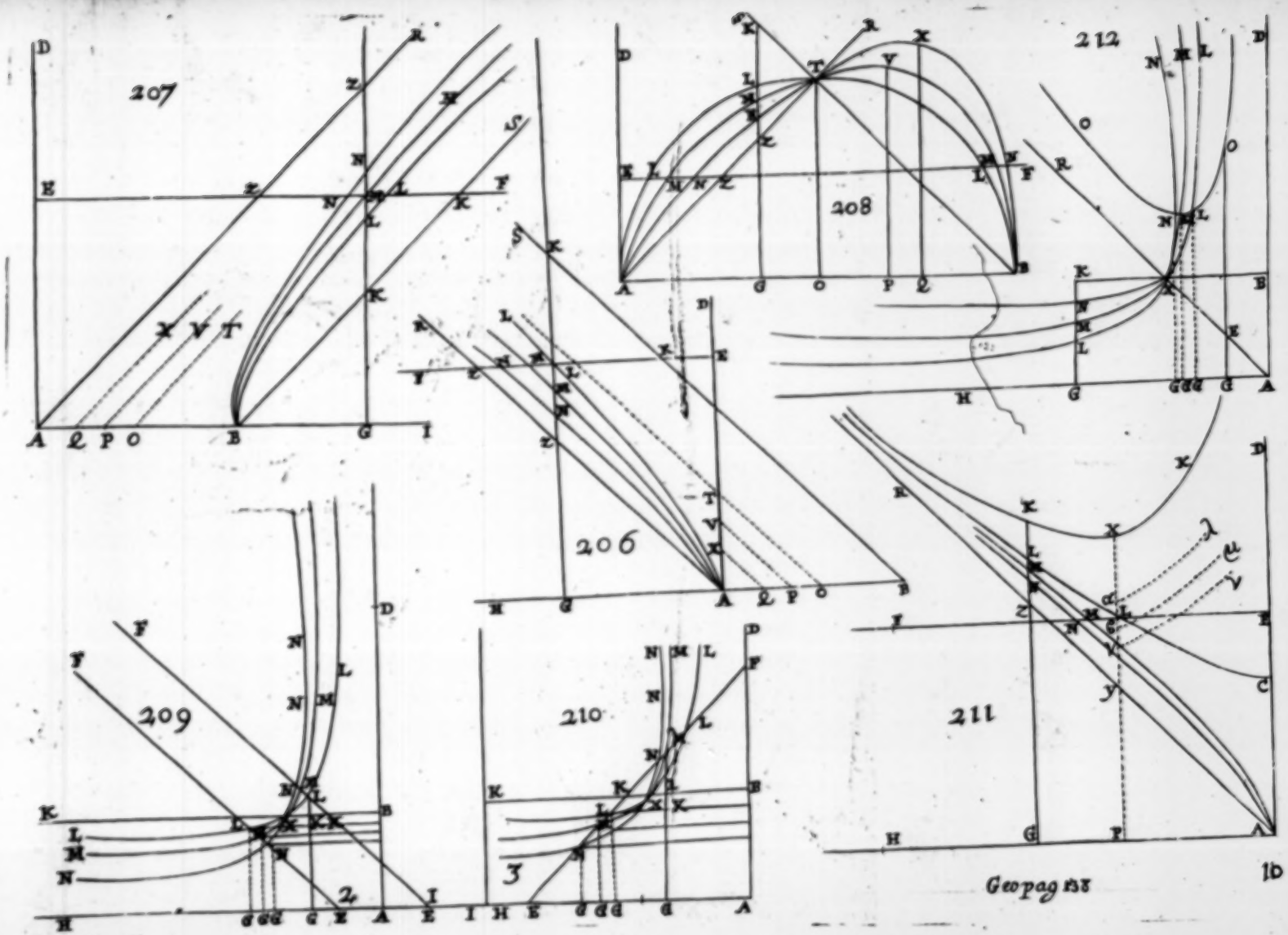
Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam ſeriem pertinent; reliquæ HL$_\lambda$, HM$_\mu$, HN$_\nu$ ad ſextam.

2. Quoad curvas ad quintam ſeriem pertinentes; ſi A$\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$, & ordinetur φY; erit Y communis linearum interſectio, ſeu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK eſt infinita, in ſecundo AC eſt maxima; in tertio ſi fuerit AP = $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una ſemper major eſt quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto ſi AQ = $\sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-



Geo pag 138

10

4. Consequenter in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est AH = AC.

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo *κυκλοειδῆ*.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola aequilatera*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + cca\,a = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensâ capiatur AB = b; & in AD ad BH perpendiculari sit AC = c; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat AG. AC :: AC. YK; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint demum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ satisfacient negotio. Nam est GK = $a + b + \frac{cc}{a}$; & GL q = $aa + ba + cc$; & GM cub = $a^3 + baa + cca$; & GN qq = $a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva CLL est pars *hyperbola aequilatera*, cujus *centrum* O, ipsam AB bisecans; & siquidem AC ⊏ AO, est OH (ad AB perpendicularis, &) = $\sqrt{\text{AC q} - \text{AO q}}$ ejus *semiaxis*; sin AC ⊐ AO, ejus axis est OI = $\sqrt{\text{AO q} - \text{AC q}}$. reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $s \supset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica, quoniam secta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$ccа + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{2c}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4. \&c.$$

Fig. 215. In recta A I sumatur A B $= b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G. A C :: A C. ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* K Y H K; sint denuò curvæ C L H λ, A M H M μ, A N H N ν tales, ut inter A G, G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ proposito satisfacient, constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} +$

cc

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{3}{4}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam A N H erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset cef + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{1}{4}b + \sqrt{\frac{3}{4}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit A $\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n \sqsupset$ A φ, erit A φ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est A H $= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$
$aa + ba - cc = nn.$
$a^3 + baa - cca = n^3.$
$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta BAH sumatur BA = b; & in AD ad AH perpendiculari sit AC = c; sintque anguli HAR, HBS semirecti; tum utcunque ductâ rectâ GKξ ad AH perpendiculari (quæ ipsam BS secet in ξ; sit AG. AC :: AC. ξK; & per K intra *asymptotos* VD, VS describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ HLλ, HMμ, HNν ad decimam seriem pertinent; reliquæ CLH, AMH, ANH ad undecimam.

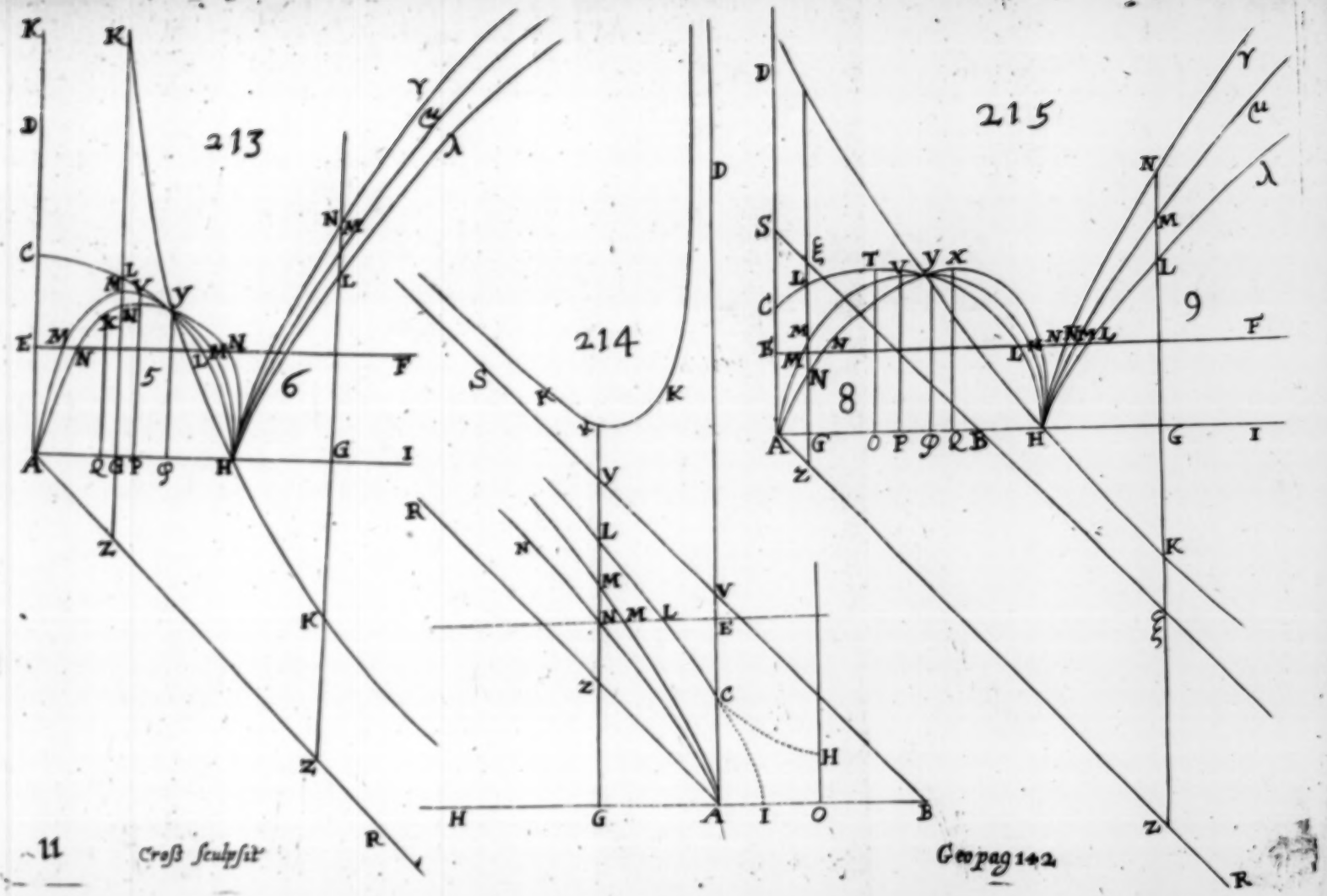
2. Curva HLλ est *hyperbola æquilatera*, & curva CLH *circulari circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : -\frac{b}{2}$)

3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. $A\phi = \frac{cc}{b}$; & $A\downarrow = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : -\frac{b}{4}$; & ordinentur φY, ↓X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata AC est maxima; sin $AP = \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : -\frac{b}{3}$; & à P ad curvam AMH ordinetur Pγ, hæc maxima erit; item si $AQ = \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : -\frac{3b}{8}$; & à

Q


213
214
215
5
6
8
9
11
Croß sculpsit
Ge pag 142

Q ad curvam A N H ordinetur Q ξ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit A B = b; & A C = c; & angulus A B S semirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: A C . ξ K; & K H K I K *hyperbola asymptotis* S A, S B descripta; denuò curvæ C L H L I λ, A M H M I μ, A N H N I ν tales sint, ut inter A G, G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N ν ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ H L I, H M I, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B bisecans) & *semiaxis* O H (vel O I) = $\sqrt{}$ A O q. — A C q reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curvi HLLI eſt *ſemicirculus*, reliquas iisdem oſtentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$, $A\downarrow = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, $\downarrow X$, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (ſi $b \multimap \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; ſi $b = \sqrt{8cc}$; ii coaleſcent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* eſt ipſa AC; ſin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item ſi $AQ = \frac{3}{4}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* eſt ipſa OT; ſin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur $p\varrho$, erit $p\varrho$ *maxima*; item ſi $Aq = \frac{3}{4}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $q\delta$ ad curvam HNI, erit $q\delta$ *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoſcentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam ſeriem animadverſa ſunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, ſemper unam radicem haberi; in decima tertia verò ſubinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem conſtant poſito fore $\frac{b}{2} \multimap c$; at ſi $\frac{b}{2} = c$, evaneſcet Series decima tertia; coaleſcent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \rightharpoonup c$, etiam evaneſcit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo caſu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, ſemiaxem (ipſi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$, tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, ſic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam ſemper, & unicam radicem obtineant. Hæc ſuffecerit inſinuâſſe; quin & rem totam hactenus particulatim attigiſſe. Subnectemus autem notas quaſdam magis generales.

Fig. 218.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^3 + ba^2 + cca - d^3 a - f^3 = y^3$; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a, fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^3}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à pura quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO, per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm ex reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locós adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subditiciæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exempli* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa^0 - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa^0 + n^3 = 0$; & hujus, † uti suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursùs sit $a^3 - baa = n^3$; vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; subsituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie 3.*

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Construatur æquatio planè similis propositæ, eâsdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergo $a^3 + baa - n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa + ba + bf + fa + ff = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa - ba + bf - fa + ff = 0$; hujus æquationis

veræ

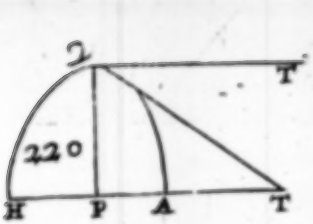
veræ radices propoſitæ falſas exhibent. Hic inſuper modus æquationis propoſitæ, quatenus illa ex aliarum in ſe ductu provenit, conſtitutionem oſtendit.

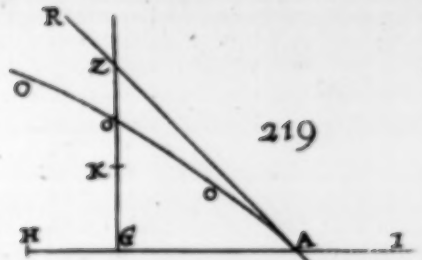
4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque ſerie ponendo (quovis in gradu ſeriei) fore $n=0$; ut in octava ſerie ſit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima ſit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix minima.*

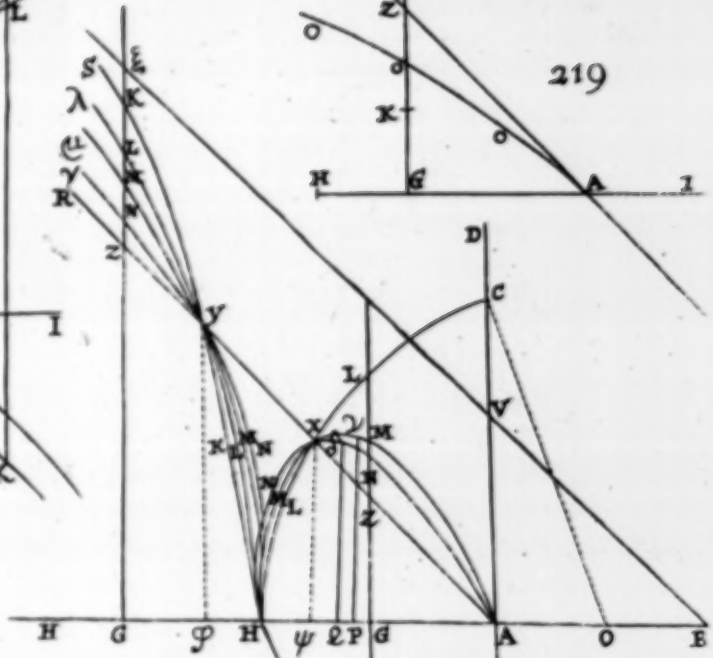
5. *Curvarum nodi*, vel *interſectiones* innoteſcunt, cujuſvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, ſit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

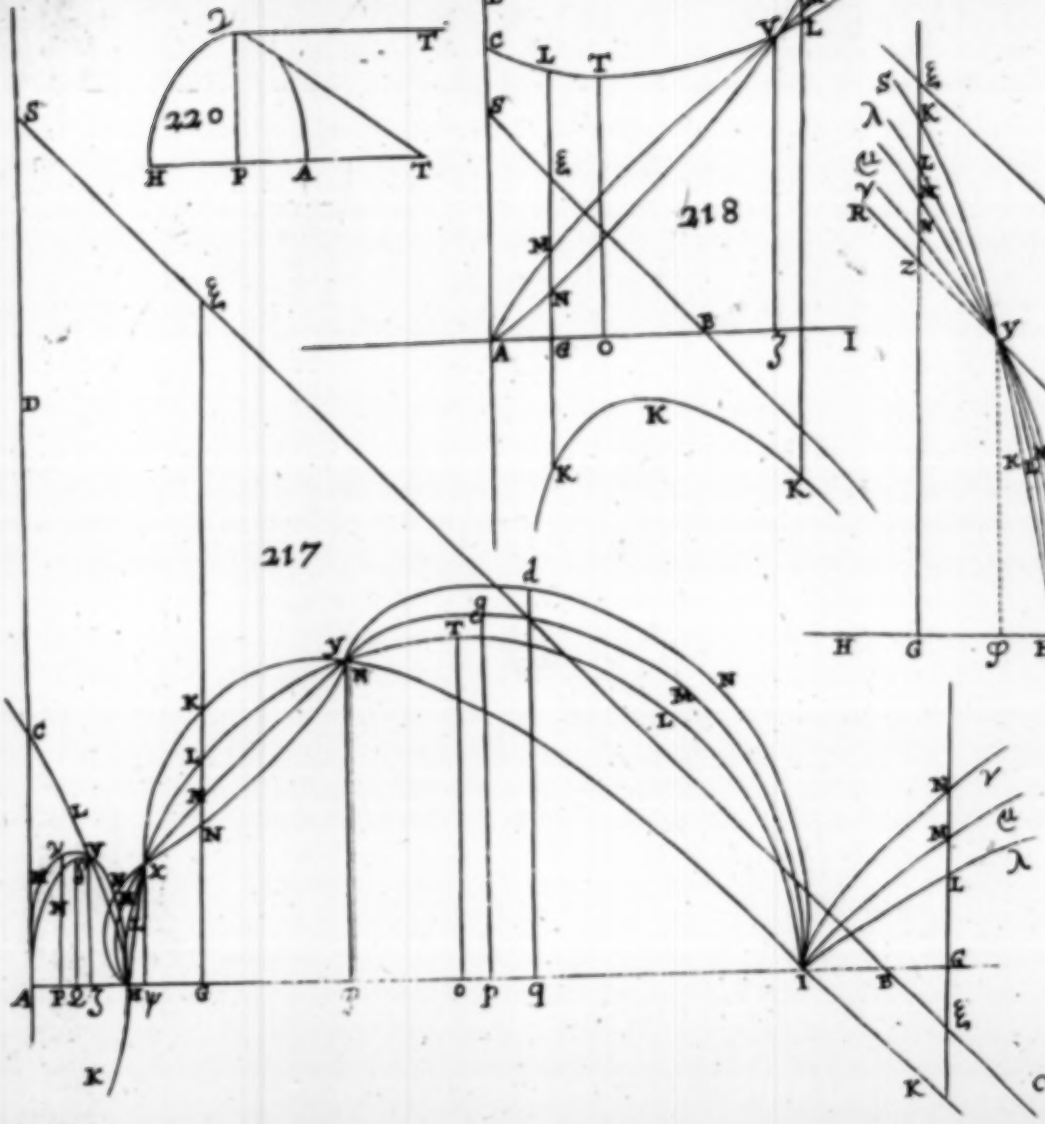
6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodiſque paſſim notis inveſtigantur; ego ſimul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ ſic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúſque gradum, cujus æquatio eſt $ccx-bax-a^3=x^3$; poſito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de ſupra monſtratis) fore $PT=\frac{3x^3}{3ax+2bx-cc}$, tum conſidero, ſi ordinata P γ ſit maxima, fore tangentem ipſi H A parallelam, ſeu rectam P T eſſe infinitam; quare cùm ſit $x^3=PT\times:3ax+2bx-cc$; & x ſit finita, patet eſſe $3ax+2bx-cc=0$; vel $ax+\frac{2}{3}bx=\frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:}-\frac{b}{3}=a=AP$. Fig. 220.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe ſi reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipſius A P in exemplo proximè ſuperiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipſâ a ſubſtituatur, ſi quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* conſtrui nequit









216

Cruss sculpsit Geo pag 146

12

Fi

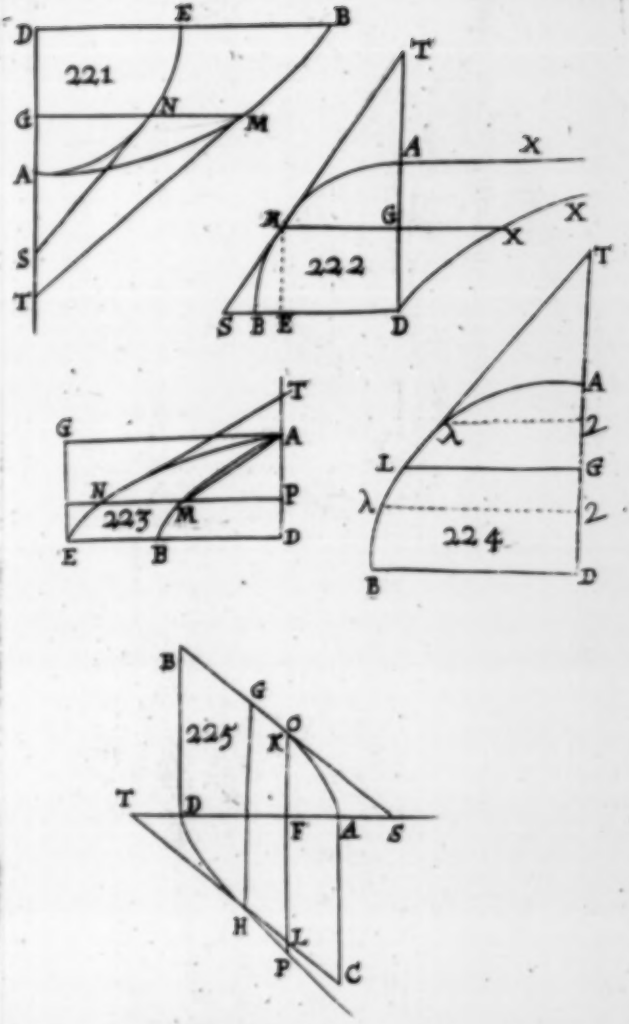
nequit, aut ſaltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & ſpecies præ ſe ferunt. Eadem *minimarum* eſt ratio; tantùm ibi proveniens *ſumma* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmiſſis. Hîc itaque ſubſiſto.

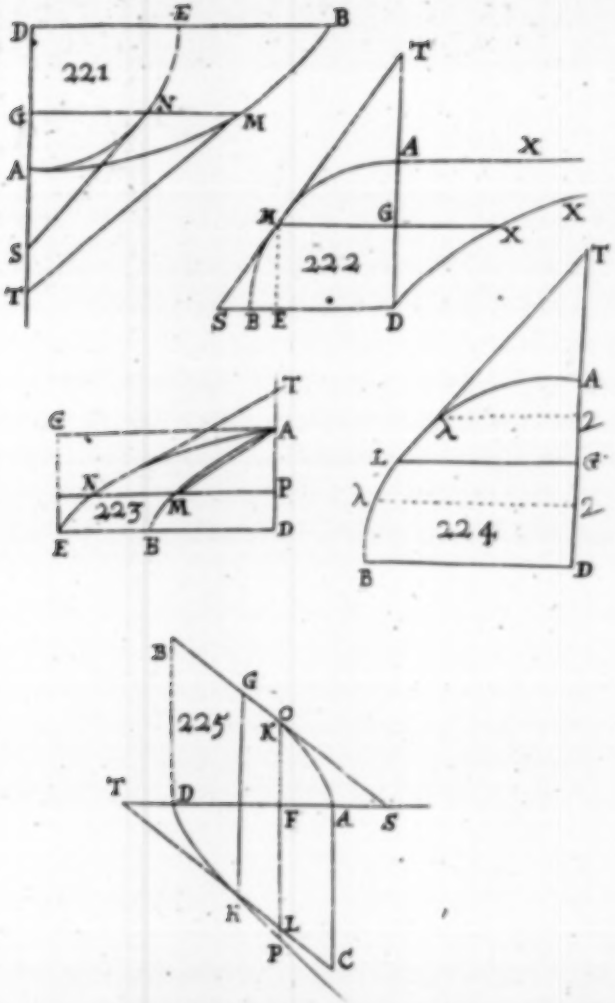
Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

Pag. 5. Lin. 20. ad testatur, *lege* testatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 31. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo censeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad. *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35 *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* divisâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major est ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* versari. *p.* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* 2 *f x y*. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* se intersecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* δ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipsi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 61 *l.* 27. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* στοιλεχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg.* Q O q = Z q. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (o) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76 *l.* 20. *leg.* tanget recta RFK. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p.* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{VCZq} = CG$. *p.* 87 *l.* 14. *leg.* $D\psi^3 = \sqrt{\frac{12}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96. *l.* 22. *leg.* $AD = \frac{1}{2} CA$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* semi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQO}{2\ Rad.}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propositum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D L. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* [illegible] à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.


D
E
B
221
G
N
M
A
S
T
T
A
X
R
G
X
X
222
S
B
E
D
T
A
G
N
P
223
M
E
B
D
T
A
2
λ
L
G
λ
2
224
B
D
B
G
225
O
K
T
D
F
A
S
H
L
P
C



Geom: pag: 149

13.

Addenda Lectionibus Geometricis.

Vacua Pagella explenda hæc adjici poſſunt: ὑποφαδικὰ vice, animadverto potuiſſe ſecundo Appendicula tertiæ Lectionis XII Problemati, pag. 122. *Corollaria quædam adponi non injucunda, qualium adſcribam unum & alterum.*

Probl. I.

DEtur linea quæpiam AMB (cujus axis AD, baſis DB) curva ANE deſignetur talis, ut ductâ liberè rectâ MNG ad BD parallelâ, quæ ipſam ANE ſecet in N, ſit curva AN æqualis ipſi GM. Fig. 221.

Curva ANE talis ſit ut ſi MT curvam AMB, & NS curvam ANE tangant, ſit SG.GN:: TG.$\sqrt{GMq-TGq}$, ipſa ANE Propoſito faciet ſatis.

Probl. II.

Iiſdem quoad cætera Suppoſitis, & conſtitutis; curva ANE jam talis eſſe debeat, ut curva AN ſemper æquetur interceptæ rectæ NM.

Curva ANE jam talis ſit, ut ſit SG.GN::2TG×GM: GMq—TGq; erit ANE curva quæ deſideratur.

Probl. III.

Datur curva quæpiam DXX, cujus axis DA; reperiatur curva AMB proprietate talis, ut ſi liberè ducatur recta GXM ad ipſam AD perpendicularis, ponaturque SMT curvam AM tangere, ſit MS æqualis ipſi GX. Fig. 222.

Liquet rationem TG ad TM (hoc eſt rationem GD ad MS, vel GX) dari; adeoque rationem TG ad GM quoque dari.

Inservit hoc superficiebus designandis, quarum in promptu sit dimensio, etenim (ductâ ME ad AD parallelâ) Superficies Solidi ex plani BME circa axem DB rotatu progeniti adæquat $\frac{\text{Periph}}{\text{Rad}} \times GDX$, ut habetur in 11ª Lectionis XII.

In Lect. XI. appendice, numero XXXIII. de Cycloide profertur Theorema quoddam, id quod ex hujusmodi generaliori Theoremate deduci potuisset.

Fig. 223. Sit AMB curva quælibet, cujus Axis AD, basis DB, sit item curva ANE talis, ut si arbitrariè ducatur PMN ad DBE parallela, positoque rectam TN curvam ANE tangere, sit TN parallela subtensæ AM; completo Rectangulo ADEG erit Spatium trilineum AEG æquale Segmento ADB.

Huic suppar Theorema tale est: iisdem positis, si tam Segmentum ADB, quam Spatium AEG circa Axem AG convertantur; erit productum è Segmento ADB Solidum producti ex AEG duplum.

E tangentium porrò contemplatione suborta est methodus, per quam expeditissimè plurima circa maximas quantitates Theoremata deducuntur; quæ certè si tempestivè se objecissent, digna censuissem quæ Lectionibus insererentur, ex iis indigitabo nonnulla.

Fig. 224. Sit curva quæpiam ALB, cujus Axis AD, basis DB; & huic parallelæ LG, $\lambda\gamma$; item LT curvam tangat.

Theor. I.

Sit m numerus quicunque, potestates exponens; si ponatur $DG^{m-1} \times TG = GL^{m}$, erit $DG^{m} + GL^{m}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} + \gamma\lambda^{m}$.

Theor. II.

Iisdem sumpto numero m, si ponatur $BL^{m-1} \times TL = GL^{m}$, erit $GL^{m} + BL^{m}$ maximum seu majus quam $\gamma\lambda^{m} + B\lambda^{m}$.

Theor. III.

Sint numeri quilibet m, n; si ponatur $m \times TG = n \times DG$, erit $DG^{m} \times GL^{n}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} \times \gamma\lambda^{n}$.

Theor.

Theor. IV.

Quod ſi ponatur $m \times TL = n \times \text{arc } BL$, erit $GL^{n} \times BL^{m}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma A^{n} \times BA^{m}$.

Theor. V.

Si fuerit $TG \times GL = DGLB$, erit $DGLB \times GL$ maximum, ſeu majus quàm $D\gamma A B \times \gamma A$.

Theor. VI.

Sin $TG \times GL = n\,DGLB$, erit $GL \times \sqrt{DGLB}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma A \times \sqrt{D\gamma AB}$.

Haud difficili negotio, cum hæc demonſtrantur, tum ejuſmodi complura deprehenduntur.

Ad illa verò ſuccinctius comprobanda deſervire poſſunt hujuſmodi Theoremata.

Sint duæ curvæ AGB, DHC quarum communis axis AD, ſed ordinatæ inverſo ſitu increſcant ab A ad DB, decreſcant à D ad AC; ad ordinatas verò communis GEH terminos, recta GS curvam AGB, & recta HT curvam DHC contingant. Fig. 225.

I. Si recta HT rectæ GS parallela ſit, erit GEH maxima ordinatarum in continuum jacentium ſumma.

Nam utcunque ducta OKFLP ad GEH parallela (quæ Lineas ſecet ut cernis) erit $GH = QP \sqsubset KL$.

Not. Verum hoc, ſi curvarum partes concavæ axi obverſæ jaceant, aliàs GEH erit minima.

II. Si $ES = ET$, erit rectangulum ex EG, EH maximum: Nam ob $SE.SF :: EG.FO$, & $TE.TF :: EH.FP$, erit $SE \cdot TE . SF \cdot TF :: EG \cdot EH . FO \cdot FP$, itaque cum ſit $SE \cdot TE \sqsubset SF \cdot TF$, erit $EG \cdot EH \sqsubset FO \cdot FP$.

FINIS.

UBi (pag. 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\Delta}{\circ}$, nec adponitur ratio ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.